


FONDO PIZZOFALCONE


10. B. 29
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVI
Palchetto
Num.° d' ordine
10-D-19


NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
I
431
NAPOLI

ÉLÉMENS

DE MÉCANIQUE.

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent chez le même Libraire.

Élémens du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Cinquième édition, revue et augmentée, in-8°, 1838. Prix, 8 fr. pour Paris, et 9 fr. 75 c. par la poste.

Théorie des courbes et des surfaces du second ordre. Troisième édition, sous presse.

Se trouvent aussi :

A Toulouse, chez CHARPENTIER, libr., rue Saint-Rome.
Londres, — DULAU et Cie, libraire.
Leipzig, — MICHELSEN, libraire.
Liége, — DESOER, libraire.
Milan, — DUMOLARD.
Vienne, — ROHRMANN et SOHWEIGER, libr.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

ÉLÉMENS

DE MÉCANIQUE,

PAR J.-L. BOUCHARLAT,

Chevalier de la Légion-d'Honneur, Docteur ès-Sciences, et ancien Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires; Membre de la Société philotechnique, de l'Athénée des arts, des Académies royales de Bordeaux, Lyon, Marseille, Rouen, Toulouse, Caen, Orléans, Dijon et Nancy; de celles du Gard, de la Somme et de Vaucluse; de la Société académique de la Loire-Inferieure, et des Sociétés des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Tours et de Strasbourg, etc.

TROISIÈME ÉDITION.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1840

PRÉFACE

Dans cet Ouvrage, qui fait suite à mes *Élémens de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, je me suis proposé de rassembler, sous un cadre peu étendu, toutes les théories essentielles de la Mécanique des modernes, c'est-à-dire de celle qui s'élève à ce degré de généralité introduit dans cette science par Lagrange et Laplace, et dont s'écarte entièrement la manière restreinte avec laquelle l'envisageaient La Caille, Bezout, Bossut et quelques autres géomètres.

On s'est long-temps borné, dans les traités de Mécanique, à n'employer les équations du mouvement que dans l'hypothèse où il s'effectue dans un plan. C'était voir la nature en profil, et non sous son aspect le plus ordinaire. Il était donc im-

portant de considérer les corps comme se mouvant d'une manière quelconque dans l'espace; et, pour parvenir à ce but, la Géométrie analytique à trois dimensions devenait indispensable. En appliquant ce puissant ressort à la Mécanique, cette science a dû changer de face, mais en changer pour la dernière fois.

La généralité qu'elle a acquise, et qui permet d'embrasser beaucoup d'objets à la fois, épargne un temps qu'on doit d'autant plus ménager, que le domaine de nos connaissances s'accroît tous les jours. Néanmoins, je ne pense pas que ce soit là une raison d'être trop laconique, et de laisser désirer ces développemens qui facilitent l'intelligence d'un ouvrage de ce genre. Quelqu'un a prétendu que les difficultés dont il peut être hérissé étaient avantageuses à l'esprit, et qu'en cherchant à les vaincre on le fortifiait par cet exercice. Cette assertion ne doit pas déplaire aux écrivains qui s'inquiètent peu d'être intelligibles : ce qu'il y a de certain, c'est que ces transitions brusques, qui déroutent le lecteur, nuisent rarement à l'auteur; car le lecteur attribue presque toujours l'embarras qu'il éprouve à la difficulté inhérente à la matière qu'il étudie. C'est une des causes qui ont détourné des Mathématiques beaucoup d'hommes qui auraient pu enrichir cette science de leurs découvertes, et que de pénibles efforts ont découragés. Il en est d'autres qui, avec plus de persévérance, se faussent

l'esprit, parce que, manquant des données nécessaires, ils ne peuvent que s'égarer; tandis que celui qui s'accoutume de bonne heure à suivre une marche méthodique, augmente ses facultés intellectuelles à mesure qu'un ouvrage le fait penser davantage, et qu'il contracte l'habitude de se rendre raison de tout.

On peut donner pour base à la Statique le théorème du parallélogramme des forces, ou celui des forces parallèles; car l'une de ces propositions étant établie, l'autre s'en déduit aisément. Cette dernière offrant une démonstration plus simple, j'ai cru devoir commencer par là cette partie de mon ouvrage. Cependant ceux qui préféreraient commencer la Statique par la proposition du parallélogramme des forces, pourront se satisfaire, et trouveront dans ma Note première ce théorème démontré de deux manières différentes; et à l'aide d'un léger changement d'ordre que j'indique pour quelques articles, ils passeront facilement de la proposition du parallélogramme à celle de forces parallèles.

Quant aux deux démonstrations du parallélogramme des forces, l'une appartient à M. Poisson et l'autre à M. Duchayla; mais je les ai beaucoup modifiées pour en faciliter l'intelligence et les compléter.

La Statique est la partie de la Mécanique qui comporte le moins de connaissances mathémati-

ques, et dont, par cette raison, l'étude est le plus répandue. Les anciens mêmes la cultivaient, et n'avaient aucune notion de la Dynamique. Ce n'est point que la Statique n'attendît encore de grands progrès : elle s'est perfectionnée dans les temps modernes, mais ce n'est que de nos jours qu'elle est sortie de la carrière étroite des cas particuliers, et que l'on est parvenu à renfermer dans des équations générales toutes les questions qu'on peut se proposer sur l'équilibre.

Je démontre facilement ces équations à l'aide de quelques expressions trigonométriques d'un fréquent usage, et de la notation qui a tant contribué à opérer cette heureuse révolution dans la science.

La théorie des forces situées d'une manière quelconque dans l'espace met en pratique ce principe, que la projection d'une droite sur un plan est égale au produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison; mais il est des questions de haute Mécanique qui exigent que cette proposition prenne plus d'extension. C'est ce qui m'a déterminé à démontrer les propriétés remarquables du Plan principal, qui complète la théorie des projections et celle des momens.

Traitant ensuite du centre de gravité, j'en donne les formules générales, exprimées à l'aide du Calcul différentiel et disposées dans un meilleur ordre. Je me sers du même moyen pour démontrer, en

peu de mots, le théorème si ingénieux et si fécond de Guldin.

Je passe en revue les machines simples, et, quand je traite des cordes, je parviens d'une manière très facile à l'équation de la chaînette, courbe que l'architecture et la navigation rendent célèbre.

La théorie des machines est suivie de celle du frottement qui, dans l'état où est la science, laisse encore bien des choses à desirer. Enfin je termine cette première partie de la Mécanique par l'exposition du fameux principe des vitesses virtuelles. Ce principe, que Lagrange a pris pour base de sa Mécanique, était susceptible de recevoir quelques améliorations dans sa démonstration générale, c'est le but que je me suis proposé d'atteindre : j'ai tâché surtout de donner plus de rigueur aux raisonnemens qui s'appuient sur la considération des infiniment petits.

Le Calcul différentiel n'entre, en quelque sorte, que d'une manière accessoire dans la Statique; il joue un plus grand rôle dans la Dynamique : c'est là qu'il devient tout-à-fait indispensable. En effet, comment, si l'on ne l'employait, pourrait-on résoudre la plupart des problèmes qui concernent le mouvement des corps, lorsque les données premières de ces problèmes, qui sont la vitesse, et la force accélératrice, ont pour expressions des coefficiens différentiels? Je m'attache particulièrement à bien faire saisir le sens qu'on doit attribuer à ces

quantités, et je les détermine sans recourir aux infiniment petits.

Le mouvement qui s'effectue en ligne droite présente diverses circonstances qui donnent lieu à autant de problèmes. C'est là que l'on commence à voir comment les équations du mouvement en font connaître toutes les propriétés, lorsqu'on parvient à les intégrer.

M'appuyant ensuite sur la proposition du parallélépipède des vitesses, je donne les équations générales du mouvement curviligne; j'examine en particulier le cas où le mobile est assujéti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface dont on a les équations; je fais connaître le principe des aires et la belle propriété des centres fixes.

Le mouvement en ligne courbe m'amène à traiter du mouvement sur la cycloïde, du mouvement d'oscillation, du tautochronisme, et des propriétés curieuses du pendule simple.

Le pendule, à son tour, me fournit l'occasion de déterminer l'expression de la gravité, et d'examiner quelle est la nature de la force centrifuge qui en atténue l'effet.

Comparant entre elles ces deux forces, je détermine l'intensité de la pesanteur dans l'hypothèse où le globe terrestre serait immobile; c'est ainsi que j'obtiens la première donnée qui va me servir à la vérification de la loi de Newton. Le problème du Système du monde me fournit ensuite la plus

brillante application de l'intégration des équations du mouvement curviligne, et en complète la théorie.

Newton employant les mesures fautives de Picard, pour évaluer la chute d'un corps à la région de la Lune en une minute de temps, n'avait trouvé qu'une différence d'un pouce et demi entre le résultat fourni par la théorie et celui que donne l'observation. Je ne pouvais rien conclure de ce calcul, car on sent qu'une erreur peut s'atténuer par des compensations. Partant de données moins inexactes, je suis parvenu à un résultat encore plus approché.

Néanmoins, comme on pourrait ne pas trouver assez rigoureuse l'hypothèse où, dans la seconde édition de cet ouvrage, eu égard au peu de différence qui en résulte dans la mesure de l'attraction, j'avais substitué une forme sphérique à celle de notre globe, j'ai cru devoir abandonner cette hypothèse dans cette troisième édition, et prendre pour base de mes calculs le rayon de la Terre à l'équateur, d'après les mesures les plus récentes, et la parallaxe horizontale de la Lune lorsque cet astre y est dans sa moyenne distance à la Terre.

Ayant ainsi démontré que la loi de l'attraction se réalisait, à très peu de chose près, relativement à la Lune, je déduis ensuite cette loi de la démonstration, *à priori*, de celles de Képler.

C'est là que me dispensant d'employer cette mul-

titude de propositions et de corollaires dont la marche est si lente dans le géomètre anglais, je parviens à trouver l'équation de la trajectoire, sans même supposer que la loi de la raison inverse du carré de la distance existe; de sorte qu'en modifiant convenablement un des élémens de la courbe, on peut établir toutes sortes d'hypothèses sur la loi de l'attraction. Enfin, je montre que lorsqu'on suppose que cette loi est celle de la raison inverse du carré de la distance, on tombe sur une section conique. La manière dont je déduis l'expression des axes principaux, et tous les autres élémens de la courbe, présente un degré de simplicité auquel, à ma connaissance, on n'était pas encore parvenu jusqu'à ce jour. Cela me donne lieu de démontrer, avec une extrême facilité, que les carrés des révolutions sont comme les cubes des distances, et que l'ellipse donnée par l'observation nécessite que la loi de l'attraction soit celle de la raison inverse du carré de la distance.

Le mouvement des projectiles est encore une dépendance de la gravitation; c'est le cas où cette force est combinée avec une force d'impulsion. Je considère d'abord ce mouvement dans le vide; je le démontre ensuite dans un milieu résistant.

On n'a pu, jusqu'à présent, intégrer sous forme finie les équations différentielles de la courbe décrite par les projectiles dans un milieu résistant, mais on a le moyen de la construire par points. Cette opération graphique était un objet assez peu

éclairci, dans les ouvrages qui ont précédé le mien : je crois l'avoir expliqué d'une manière d'autant plus satisfaisante, que je n'ai pas même employé les infiniment petits.

Dans ce qui précède, le mouvement n'agissait que sur un corps; on peut demander maintenant quels en sont les effets lorsque plusieurs mobiles se rencontrent. Cela nous porte à considérer le choc des corps; on voit ensuite se manifester les principes de la conservation du centre de gravité et des forces vives : ce dernier nous conduit, par analogie, au beau théorème de Carnot.

Il y eut autrefois une controverse célèbre sur les forces vives : j'en parle, non pour rappeler une dispute sur le fond de laquelle on est d'accord, mais pour donner une idée précise de la notion des forces vives.

Jusqu'ici les corps sont supposés agir librement : il était utile de considérer encore les mouvemens qui leur sont communiqués, lorsque ces mouvements sont altérés par la liaison mutuelle de ces corps. Les procédés que nous avons indiqués deviendraient inapplicables dans cette circonstance, si nous ne surmontions cet obstacle à l'aide du fameux principe de d'Alembert. Ce principe, par sa grande simplicité, était difficile à démontrer, et je crois l'avoir fait d'une manière qui ne laisse rien à desirer.

Après avoir donné quelques applications simples,

je m'en sers pour déterminer successivement le mouvement de rotation d'un corps, les propriétés du pendule composé, et le double mouvement que prend un corps libre qui, par l'action d'une force quelconque, est entraîné dans l'espace.

Le principe de d'Alembert, rendu familier par l'usage qu'on en fait dans la solution de tous ces problèmes, reçoit ensuite la plus belle application lorsqu'on détermine le mouvement d'un système quelconque de corps, ce qui complète la Dynamique : aussi déduit-on avec une extrême facilité, des équations de ce mouvement, les principes des aires, et ceux de la conservation du centre de gravité et des forces vives, dans toute leur généralité. Ce dernier principe ne se démontre ordinairement qu'à l'aide du calcul des variations, mais j'y suis parvenu par un autre moyen, pour ne point sortir du genre de connaissances qui peuvent suffire à l'étude de cet Ouvrage.

La troisième partie comprend l'Hydrostatique. Me fondant sur le principe de l'égalité de pression, je démontre les équations générales de l'équilibre des fluides, et j'en donne l'application aux cas des fluides élastiques et des fluides pesans. J'explique la théorie des pompes, celle de l'aréomètre, etc., et je termine l'Hydrostatique par une démonstration fort simple de la formule générale avec laquelle on détermine par le baromètre la hauteur des différens lieux de la Terre. J'ai compris dans

cette troisième partie la théorie des corps flottans, en adoptant, comme Bouguer, une marche en quelque sorte géométrique, qui fait parfaitement sentir la manière dont toutes les choses se passent, je détermine la position du métacentre, et je déduis ensuite les conditions d'équilibre des corps flottans de la formule qui donne la vitesse dans le mouvement de rotation.

La quatrième partie de cet Ouvrage comprend l'Hydrodynamique. Je m'y suis beaucoup étendu sur l'écoulement des eaux, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, parce que, dans cette partie de la Mécanique, c'est ce qui est le plus utile et le plus d'accord avec l'expérience. Je termine cet Ouvrage par la théorie des équations générales du mouvement des fluides. Cette matière, depuis Euler, ne me paraît pas s'être beaucoup éclaircie, et soit par de nouvelles notations, soit par des considérations géométriques qui nous dirigent dans la marche de l'analyse, je crois être parvenu à la rendre tout-à-fait intelligible.

En général, j'ai toujours cherché, dans cet ouvrage, à coordonner mes démonstrations à une idée principale, afin de ne pas sortir de cette unité qui est la première règle à suivre dans toutes les productions de l'esprit humain.

Ainsi que dans mes *Élémens de Calcul différentiel* et de *Calcul intégral*, j'ai désigné par de fins caractères les objets qui sont le moins élémentaires,

et qu'on pourra supprimer à une première lecture. L'étude en deviendra plus fructueuse lorsque, par ce travail préparatoire, on aura acquis de l'habitude à se servir des équations fondamentales de la Mécanique.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

STATIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE.

Pages.

TROISIÈME PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

HYDRODYNAMIQUE.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pages. Lignes.

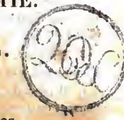
366, 5, *au lieu de* art. 559 et 560, *lisez* art. 558 et 559
366, 23, *au lieu de* 560, *lisez* 559
567, 12, *au lieu de* art. 561, *lisez* 560
567, 29, *au lieu de* art. 560, *lisez* 559
567, 2e en remontant, *au lieu de* art. 559, *lisez* 558

ÉLÉMENS

DE MÉCANIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

STATIQUE.



Notions préliminaires.

1. La Mécanique est la science qui traite des lois de l'équilibre et de celles du mouvement. Appliquée aux solides elle se divise en Statique et en Dynamique, suivant que ces solides sont en équilibre ou en mouvement.

Appliquée aux fluides, elle contient aussi deux parties, l'Hydrostatique qui est la statique des fluides, et l'Hydrodynamique qui nous fait connaître les propriétés auxquelles leur mouvement donne lieu.

2. La Statique ayant pour but de déterminer les lois de l'équilibre des corps, cet équilibre peut toujours être censé produit par la destruction mutuelle de plusieurs forces.

3. On appelle *force* ou *puissance* toute cause qui imprime à un corps ou à un point matériel le mouvement ou une tendance au mouvement.

4. Lorsqu'une force agit sur un point matériel, elle peut le faire de deux manières ; ou en entraînant le point vers elle, ou en le poussant d'un côté opposé. Nous adopterons la première

hypothèse toutes les fois que nous ne préviendrons pas du contraire.

5. Un point matériel étant sollicité par une force unique, doit naturellement se mouvoir en ligne droite; car il n'y a aucune raison pour qu'il aille plutôt à droite qu'à gauche.

6. Cette droite suivant laquelle une force agit, est la ligne de direction.

7. L'effet d'une force dépend, 1° de son intensité; 2° de son point d'application; 3° de sa direction; 4° du sens dans lequel elle agit suivant cette direction.

8. L'intensité d'une force est sa faculté plus ou moins grande à imprimer le mouvement.

9. Il est certain que si deux forces directement opposées tiennent un point matériel ou une droite inflexible en équilibre, l'intensité de l'une de ces forces peut être arbitraire, pourvu qu'on donne à l'autre la même intensité. Ce que nous disons de deux forces pouvant s'appliquer à plusieurs, on voit qu'il suffit de connaître les rapports des forces et non leurs valeurs absolues pour établir les conditions de l'équilibre.

10. Ayant pris une force pour unité, on dit qu'une autre force lui est égale, lorsque, lui étant directement opposée, elle la tient en équilibre.

Deux forces égales appliquées à un même point matériel et agissant dans la même direction et dans le même sens, constituent une force double : cette force deviendra triple, si elle résulte de la réunion de trois forces égales, et ainsi de suite; de sorte que ces forces croissent comme leurs intensités. Par conséquent, si, plusieurs forces appliquées au point M (fig. 1), tendent toutes à entraîner ce point dans le sens de M en B, on devra ajouter ensemble ces forces, parce que leur effet sera le même que celui d'une seule force qui agirait avec la somme de leurs intensités. Par la même raison, on

devra retrancher de la somme de ces forces, c'est-à-dire regarder comme négatives, celles qui tendent à entraîner ce point M vers le point A.

11. L'unité de force étant arbitraire, on peut la représenter par une partie quelconque de sa direction.

12. Il est à observer que lorsqu'une force est appliquée à un corps, tous les points de ce corps étant liés entre eux, l'un ne peut se mouvoir sans entraîner les autres; par conséquent, une force appliquée à un point A (fig. 1) aura le même effet Fig. 1. que si elle était appliquée à tout autre point M, pris sur la direction AB de cette force.

Lors même que l'on ne considérerait pas un corps, on peut concevoir les points de l'espace pris sur la ligne de direction comme des points mathématiques, et l'on sent que l'un ne peut se mouvoir sans entraîner les autres.

13. Il suit de l'art. 12, qu'en plaçant sur la ligne de direction, un obstacle invincible, la force n'aura aucun effet.

14. Deux forces égales P et Q (fig. 2 et 3), qui, appliquées Fig. 2, et 3. aux points A et B d'une droite inflexible AB, et dans sa direction, agissent en sens contraires, se font équilibre; car si P tend à transporter A de A en a, le point B, lié à A par les points intermédiaires, devra parcourir $Bb = Aa$; mais, par hypothèse, la force Q tend à entraîner B d'une quantité $Bb' = Aa$, donc B ne pouvant obéir à l'une des forces plutôt qu'à l'autre, restera immobile, et le repos s'introduira dans le système, art. 13. Il en sera de même si les forces P et Q, au lieu de tendre chacune à entraîner les points A et B, agissent sur ces points par pulsion.

15. Quand la droite AB se réduit à un point, deux forces égales et directement opposées se font encore équilibre; mais si ces forces sont inégales, la plus grande, animée par la différence de leurs intensités, entraînera le point M.

De la composition et de la décomposition des forces qui sont appliquées à un point.

16. Lorsque deux forces agissent sur un mobile, et qu'elles forment entre elles un angle dont le sommet est le point d'application de ces forces, l'équilibre ne peut subsister. En

Fig. 4. effet, supposons que les forces P et Q (fig. 4) fussent en équilibre, on pourrait introduire dans le système une force P′ égale et directement opposée à P. Cette force, en vertu de l'équilibre de P et de Q, aurait tout son effet et entraînerait le point M dans le sens de M en P′; mais P et P′ devant se détruire, puisque ces forces sont égales et directement opposées, il en résulterait que la force Q agirait comme si elle était seule, et entraînerait le point M dans le sens de M vers Q; et comme il est impossible que le point M puisse suivre deux chemins à la fois, on ne peut sans absurdité admettre l'équilibre de P et de Q.

17. L'équilibre ne pouvant subsister entre deux forces P et Q qui ne sont pas en ligne droite, le point M se mouvra suivant une certaine direction MR, comme s'il était sollicité par une force unique R. Cette force est appelée *la résultante* des deux autres, et celles-ci en sont *les composantes* [*note première* (*)].

Observons que deux forces qui ont une résultante ne concourent pas toujours en un point. Par exemple, si deux forces parallèles P et Q agissent sur un corps et qu'une force R produise le même effet, celle-ci sera la résultante des deux autres.

18. Le cas le plus simple, après celui de l'équilibre de deux forces égales qui agissent sur un même point, est celui de l'équilibre de trois forces égales appliquées à ce point :

(*) *Voyez* les Notes à la fin de l'ouvrage.

soient P, Q et R ces trois forces, pour qu'elles se mettent en
équilibre, il faut qu'elles divisent en trois parties égales
(fig. 5) la circonférence dont leur point commun d'applica- Fig. 5.
tion M est le centre; car alors toutes les raisons que l'on
pourrait donner pour prouver que ce point doit se mouvoir
sur la direction de l'une de ces forces, pouvant s'appliquer à
l'une des deux autres, il en résulte que le point M ne
cédera de préférence à aucune, et par conséquent restera
immobile.

19. Les angles égaux PMQ, PMR et QMR (fig. 5) étant Fig. 5.
mesurés par le tiers de la circonférence, sont chacun de
$\frac{4}{3}$ *angle droit*, ou de 120° (*divis. sexagésim.*). Par consé-
quent, si l'une des trois droites PM, QM, RM (fig. 5) est Fig. 5.
prolongée en M, dans l'angle formé par les deux autres, elle
partagera cet angle en deux parties égales. En effet, MS étant,
par exemple, le prolongement de RM, on voit que les angles
PMS et QMS sont égaux comme supplémens des angles égaux
PMR, QMR, d'où il suit que MS partage l'angle PMQ en deux
parties égales.

20. Soient maintenant deux forces égales P et Q (fig. 6) Fig. 6.
appliquées perpendiculairement aux extrémités A et B d'une
droite AB; nous allons prouver que la résultante de ces forces
passe par le milieu O de la droite AB, et égale en intensité la
somme des intensités des forces P et Q. Pour cet effet, me-
nons par les points A et B les quatre droites AC, AD, BC, BD,
qui fassent chacune avec AB un angle de $\frac{1}{3}$ *angle droit*; les
triangles ACB, ADB, seront isoscèles, et auront des côtés
égaux AC, CB, AD et DB.

Cela suffira pour prouver, d'une part, que les droites AB
et CD se coupent au point O à angles droits, et de l'autre que
la figure ACBD est une losange; les côtés de cette losange et
leurs prolongemens détermineront, en se rencontrant, quatre
angles obtus ACB, ADB, P'AC, Q'BC, qui seront égaux

chacun à $\frac{4}{3}$ *angle droit*; car l'angle CAD étant par construction égal à $\frac{2}{3}$ *angle droit*, l'angle P'AC qui en est le supplément doit être de $\frac{4}{3}$ *angle droit*, autrement la somme de CAD et de CAP' ne vaudrait pas deux angles droits; et comme les côtés opposés de la losange sont parallèles, l'angle ACB équivaut à CAP', et par conséquent est aussi égal à $\frac{4}{3}$ *angle droit*. Il en est de même des autres angles CBQ' et ADB. Cela posé, la direction de CD coupant en deux parties égales l'angle ACB qui est de $\frac{4}{3}$ *angle droit*, il s'ensuit, art. 19, que les trois angles ACB, ACS, BCS seront égaux. On prouverait pareillement qu'il existe trois angles égaux aux points A, B et D.

21. Maintenant nous pouvons appliquer aux points A, B, C, D, que nous considérerons comme liés entre eux, douze forces égales, distribuées de la sorte :

au point A les trois forces égales P, P', P'',
au point B les trois forces égales Q, Q', Q'',
au point C les trois forces égales S, S', S'',
au point D les trois forces égales V, V', V'';

formant des angles de $\frac{4}{3}$ *angle droit*, elles se feront équilibre.

Mais les forces égales P' et V'', Q' et V' qui agissent en sens contraires, se détruisent deux à deux, art. 14; il en est de même des forces P'' et S', Q'' et S''. Donc, pour que l'équilibre se maintienne dans le système, il faut que les quatre forces P, Q, S et V se contre-balancent. Ces deux dernières étant égales et agissant dans le même sens, peuvent s'ajouter et s'appliquer au point O de leur direction. Ainsi, il y a équilibre (fig. 6) entre P, Q et une force R qui, égale à leur somme, passerait par le milieu O de AB.

Fig. 6.

Si nous supprimons P et Q, l'équilibre sera rompu, et nous ne pourrons le rétablir qu'en plaçant au point O une force R' égale et directement opposée à R; cette force aura donc l'effet de P et Q réunis, et par conséquent en sera la résultante. Il suit de là que *la résultante des deux forces paral-*

lèles égales P et Q, équivaut à la somme de ces forces, leur est parallèle et divise en deux parties égales la perpendiculaire AB à la direction commune de ces forces. Le fond de cette démonstration appartient à M. Fourier.

22. Pour trouver les conditions d'équilibre de deux forces parallèles inégales P et Q appliquées aux extrémités A et B d'une droite AB (fig. 7), soit p l'unité de force, et supposons $P = mp$ et $Q = np$, c'est-à-dire exprimons par $m : n$ le rapport des forces P et Q; partageons ensuite AB en deux parties qui soient dans ce rapport, nous aurons Fig. 7.

$$P : Q :: AD : DB \dots (1).$$

Portons AD de A en A′, et DB de B en B′, nous aurons encore, parce que A′D et DB′ sont doubles de AD et de DB,

$$P : Q :: A'D : DB' :: m : n.$$

Par conséquent, si l'on partage A′D en m parties égales, DB′ le sera en n, et A′B′ contiendra autant de parties égales que P + Q contient p; et comme deux des points de division a', a'', a''', etc., séparent trois parties, que trois en séparent quatre, et ainsi de suite, A′B′ renfermera un point de division de moins que de parties. Appliquant une force p à chaque point de division, il en restera une dont nous porterons une moitié en A′ et l'autre en B′, et toutes nos forces partielles seront distribuées sur A′B′. Or, les points A′ et D étant également éloignés de A, la force $\frac{1}{2}p$, appliquée en A′, fera équilibre à la moitié de la force p appliquée en D, et leur résultante sera égale à leur somme, et passera par le point A. Il en sera de même des forces p et p appliquées en a' et en $a_{,}$, des forces p et p appliquées en a'' et en $a_{,,}$, ainsi de suite; de sorte que la résultante de toutes les forces partielles distribuées sur A′D passera par le point A, et sera égale à leur somme, c'est-à-dire à P. On prouverait qu'il en est de même de DB′ à l'égard de Q. Ainsi, le système de toutes les forces partielles distri-

buées sur $A'B'$ peut être remplacé par deux forces P et Q, appliquées aux points A et B.

Mais on peut autrement combiner ces forces parallèles, car en les prenant deux à deux à égale distance du milieu O de $A'B'$, on prouvera facilement que la résultante de toutes passe par ce point O, et est égale à leur somme $P + Q$.

Il ne reste plus qu'à déterminer la position du point O. Pour
Fig. 7. cela, nous remarquerons que $A'O$ (fig. 7), moitié de $A'B'$, équivaut à AB; remplaçant cette valeur dans l'équation suivante, donnée par l'inspection de la figure,

$$AO = A'O - A'A,$$

on aura $AO = AB - AA'$, ou plutôt $AO = AB - AD = DB$; on reconnaîtra de même que $OB = AD$. Mettant ces valeurs de DB et de AD dans la proportion (1), il viendra

$$Q : P :: AO : OB \ldots \quad (2).$$

Quand P et Q sont incommensurables, cette proportion, fondée
Fig. 7. sur le partage de $A'B'$ (fig. 7) en $m + n$ parties égales, n'est plus démontrée; mais elle le devient en prenant pour points de division ceux de la droite $A'B'$ qui, parce qu'alors Aa', $a'a''$, etc., sont infiniment petits (*), est continue.

23. Cette proportion subsiste encore pour des forces parallèles
Fig. 8. lèles P et Q appliquées (fig. 8) aux points C et D d'une oblique CD; car en menant AB à angles droits, et en transportant les points d'application aux points A et B des directions de P et de Q, la proportion (2) a lieu; et si l'on y remplace le rapport de AO à OB par celui de OC à OD fourni par la similitude des triangles ACO, BOD, on aura

$$Q : P :: OC : OD.$$

(*) Si l'on voulait éviter la considération des infiniment petits, dans le cas de l'incommensurabilité, on pourrait démontrer par l'absurde la justesse de la proportion précédente, ou, ce qui revient au même, de celle-ci :

$$Q : P + Q :: AO : AB,$$

Concluons que, *lorsque deux forces parallèles et inégales P et Q sont appliquées aux extrémités C et D d'une droite CD, leur résultante partage cette droite en deux parties qui sont en raison inverse des intensités de ces forces.* Fig. 8.

24. Ce théorème nous offre un moyen facile de démontrer celui du parallélogramme des forces dont voici l'énoncé : *Si deux forces P et Q qui concourent en un point A* (fig. 9) Fig. 9. *sont représentées par les parties AB et AC prises sur leurs directions et proportionnelles à leurs intensités, la résultante de ces forces sera également représentée en intensité par la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC, et en suivra la direction.*

Il est d'abord évident que cette résultante passe par le point de concours; car l'action mutuelle des deux forces se

---

qu'on obtient en ajoutant les antécédens aux conséquens. En effet, si cette proportion était inexacte, ce serait parce que son quatrième terme devrait être plus grand ou plus petit que AB. Supposons-le plus grand et égal à Ab (fig. 8), cette hypothèse nous donnerait Fig. 8.

$$Q : P + Q :: AO : Ab;$$

alors, en partageant Ab en parties égales moindres que Bb, un des points de division tomberait entre B et b, et en appliquant à ce point n la force Q, on aurait, par ce qui précède,

$$Q : P + Q :: AO' : An.$$

La droite AO', qui entre dans cette proportion, est plus grande que AO; car, que P et Q soient incommensurables ou non, le point O' sera le milieu de $2An$ tout aussi bien que O était celui de 2AB; et comme An surpasse AB, il faut aussi que AO' surpasse AO. Cela posé, on tire des seconds rapports des proportions précédentes,

$$AO : Ab :: AO' : An;$$

et en changeant les moyens de place,

$$AO : AO' :: Ab : An;$$

proportion absurde, puisque AO est plus petit que AO', comme on vient de le démontrer, tandis que Ab surpasse An. On prouverait de la même manière que le quatrième terme de la proportion ne pourrait être plus petit que AB; ce qui montre qu'il ne diffère pas de cette droite AB.

réunissant pour entraîner ce point, il ne peut qu'appartenir à la direction de la force unique qui est la résultante des deux autres.

Fig. 9. 25. Les forces P et Q, en concourant en un point A (fig. 9), déterminent un plan PAQ dans lequel la direction de la résultante doit être comprise. En effet, si cette résultante était située au-dessus de ce plan, toutes les raisons qu'on pourrait donner pour prouver qu'elle doit suivre cette direction pourraient s'appliquer pour prouver qu'elle doit suivre une direction située symétriquement au-dessous; donc la résultante ne suivra ni l'une ni l'autre.

Fig. 10, 11 et 12. 26. Il ne sera pas plus difficile de démontrer que cette résultante suivra la droite AD (fig. 10, 11 et 12) qui partage l'angle de deux forces égales en deux parties égales.

En effet, la droite AD partageant l'angle PAQ en deux parties égales, si la droite Am était la résultante, il existerait une autre droite An absolument située, à l'égard de AD, de AQ et de AP, comme Am l'est à l'égard de AD, de AP et de AQ; de sorte que toutes les raisons qu'on pourrait donner pour prouver que Am est la résultante, pourraient s'appliquer pour prouver que An est aussi la résultante, d'où l'on conclurait qu'il y aurait deux résultantes; ce qui est impossible : donc la résultante ne peut être dirigée que suivant AD.

Fig. 13. 27. Supposons maintenant que deux forces inégales P et Q concourent en A (fig. 13), et que le parallélogramme ABCD ait pour côtés les droites AB, AC, proportionnelles aux forces P et Q, et situées dans leurs directions. Il s'agit de démontrer que la résultante de P et de Q, qui, d'après ce qui précède, passe par le point A, passera aussi par l'extrémité D de la diagonale AD. Pour cela, ayant pris $DE = AB = P$, menons la parallèle EF à la droite AB, et appliquons en E et en F deux forces Q' et Q'' égales à Q, et dirigées en sens contraires dans la direction de EF; ces forces se détruiront; et, par cela même, nous serons en droit de substituer aux forces P et Q les

quatre forces P, Q, Q′ et Q″. En considérant P et Q′ comme deux forces appliquées aux points B et E de la droite inflexible BE; comme on a par construction,

$$P : Q' :: DE : BD,$$

il suit du dernier théorème qu'on a démontre, que la résultante R des forces P et Q′ passera par le point D. D'un autre côté, si l'on transporte la force Q au point F de sa direction, les forces égales Q et Q″ auront une résultante S qui, divisant l'angle Q″FQ en deux parties égales, art. 26, passera par l'extrémité D de la losange CDEF; nous aurons donc deux résultantes R et S qui, concourant au point D, passeront par ce point. Il en sera de même de la résultante de P et de Q, qui ne diffère pas de celle de R et de S.

28. Il nous reste à démontrer que les composantes P et Q étant représentées en intensités par les droites AB et AC (fig. 14), la résultante doit l'être par la diagonale AD. Fig. 14.

En effet, si au point A (fig. 14), et dans la direction de la diagonale AD du parallélogramme BAC des forces $P = AB$ et $Q = AC$, on applique une force inconnue X égale et directement opposée à leur résultante, l'équilibre subsistera entre ces trois forces. On pourra donc regarder à son tour Q comme directement opposé à la résultante des forces X et P; d'où il suit que si, par l'extrémité B de cette dernière, on mène BE parallèle à X, cette parallèle rencontrant en E la direction de la diagonale Q, déterminera BE pour le côté qui, dans le parallélogramme BAFE, sera opposé, et égal au côté X; mais BE comme côté du parallélogramme ED, est égal à la diagonale AD du parallélogramme des forces P et Q; donc $X = AD$: ce qui prouve que l'intensité de la résultante se mesure par la longueur de la diagonale.

29. Un des premiers corollaires que l'on peut tirer de la proposition du parallélogramme des forces, est la relation trigonométrique qui existe entre deux forces P et Q qui con-

courent en un point A et leur résultante R. Pour l'obtenir,
Fig. 15. prenons sur les directions de ces forces (fig. 15) des parties AB et AC proportionnelles à ces forces, et construisons le parallélogramme ABDC, nous aurons

$$P : Q : R :: AB : AC : AD.$$

Le côté BD étant égal à AC, on peut ne considérer que les côtés du triangle ABD, et la proportion précédente devient.

$$P : Q : R :: AB : BD : AD.$$

D'une autre part, les côtés d'un triangle étant proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés, on a encore

$$AB : BD : AD :: \sin BDA : \sin BAD : \sin ABD.$$

On tire de ces proportions,

$$P : Q : R :: \sin BDA : \sin BAD : \sin ABD.$$

Le triangle des forces est ainsi ramené à la Trigonométrie.

30. Par exemple, si l'on donnait les deux composantes AC et AB, et l'angle BAC qu'elles forment entre elles, et qu'on voulût déterminer la résultante, comme l'angle BAC est supplément de l'angle ABD, on connaîtrait dans le triangle ABD l'angle B et les deux côtés compris; il serait donc facile de déterminer par la Trigonométrie le côté opposé $AD = R$. Au reste, on calculerait aisément R par la formule (*)

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B.$$

31. Si l'on veut que l'angle qui entre dans cette formule soit l'angle BAD des forces, cet angle étant supplément de l'angle B, on doit avoir $\cos B = -\cos A$; par conséquent on

---

Fig. 16. (*) Pour la démontrer, le triangle AED, rectangle en D, nous donne

$$AD^2 = (BD - BE)^2 + AE^2;$$

mettant dans cette équation AB cos B et AB sin B à la place de BE et de AE, et remplaçant $\sin^2 B + \cos^2 B$ par l'unité, on réduira.

a la relation suivante entre la résultante, les deux composantes et l'angle qui est compris entre ces dernières,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos A \ldots (3).$$

32. Lorsqu'on a plusieurs forces qui, quoique situées dans des plans différens, concourent en un point A, on en peut toujours déterminer la résultante; car il suffit de composer ces forces deux à deux et de leur substituer leur résultante, pour diminuer successivement le nombre des forces du système et les réduire enfin à une seule.

33. Il existe, sur la composition de plusieurs forces qui concourent en un point, une construction graphique très remarquable.

La voici : soient (fig. 17) P, P′, P″, P‴, etc., plusieurs forces qui concourent en un point A, et que nous représenterons par les parties Ap, Ap', Ap'', Ap''', etc., de leurs directions : on mènera à Ap' la parallèle pr égale à Ap', et l'on formera le parallélogramme $Aprp'$; la diagonale $Ar = R$ sera la résultante de P et de P′ : menant ensuite rr' parallèle et égale à Ap'', et formant le parallélogramme $Arr'p''$, la diagonale Ar' sera la résultante de R et de P″ ou des forces P, P′, P″. On voit que par ce procédé on construira un polygone $Aprr'r''$, etc., dont les côtés seront parallèles aux directions des forces P′, P″, P‴, etc., et dont les longueurs respectives représenteront les intensités des forces P, P′, P″, etc. Les distances de A aux angles de ce polygone seront Fig. 17.

Ar résultante de P et de P′,
Ar' résultante de P, de P′ et de P″,
Ar'' résultante de P, de P′, de P″ et de P‴.

En continuant ainsi, l'on voit que la distance de A à l'extrémité $r^{(n)}$ du dernier côté du polygone $Arr'r'' \ldots r^{(n)}$, sera égale à la résultante de toutes les forces.

Des forces appliquées à un même point et qui sont situées dans un même plan.

Fig. 18. 34. Soient P, P′, P″, P‴, etc. (fig. 18), différentes forces situées dans un plan, et qui aboutissent à un point A : nous mènerons par ce point les axes rectangulaires Ax et Ay, et en représentant ces forces P, P′, P″, etc., par les parties AP, AP′, AP″, etc., de leurs directions, nous les décomposerons chacune en deux autres dirigées suivant les axes Ax et Ay. Pour cet effet, soient $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., les angles que les forces P, P′, P″, etc., font avec l'axe des x, et $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, etc., les angles qu'elles font avec l'axe des y. Comme on sait qu'en général lorsque l'hypoténuse AB (fig. 19) d'un triangle rectangle, fait un angle A avec l'un des côtés, le côté adjacent a pour expression AB cos A, tandis que le côté opposé à l'angle A est égal à AB sin A (*), on pourra facilement calculer les composantes des forces P, P′, P″, P‴, etc., suivant les axes; car la force P, représentée par AB, faisant un angle α suivant l'axe des x, et un angle $\mathfrak{C}$ avec celui des y, on aura pour ses composantes,

$$AC = P\cos\alpha,\quad BC = P\cos\mathfrak{C}.$$

On trouverait de même que les forces P′, P″, P‴, etc., ont pour composantes dans le sens des x,

$$P'\cos\alpha',\quad P''\cos\alpha'',\quad P'''\cos\alpha''',\quad \text{etc.},$$

et dans le sens des y,

$$P'\cos\mathfrak{C}',\quad P''\cos\mathfrak{C}'',\quad P'''\cos\mathfrak{C}''',\quad \text{etc.}$$

Si l'on ajoute toutes les composantes dirigées suivant l'axe

(*) Pour le démontrer, il suffit de remarquer qu'on a les proportions
Fig. 19. (fig. 19)

$$AB : AC :: 1 : \cos A,\quad AB : BC :: 1 : \sin A;$$

d'où l'on tire

$$AC = AB\cos A,\quad BC = AB\sin A.$$

des x, et qu'on fasse la même chose à l'égard des composantes dirigées suivant l'axe des y, en représentant ces sommes par X et par Y, nous aurons

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = X,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.} = Y;$$

et alors toutes les forces seront réduites à deux, l'une X qui agira suivant l'axe des x, et l'autre Y qui agira suivant l'axe des y. Nommant R la résultante de ces deux forces, elle nous sera donnée par l'équation

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

35. Dans ce qui précède, nous avons attribué le signe positif à tous les cosinus, parce que nous les avons considérés en général; mais, dans la pratique, il faudra avoir égard aux signes qui doivent les affecter. C'est ce qui va s'éclaircir par les considérations suivantes. Soit donc un point M (fig. 20), que sollicite une force représentée en intensité par la droite MP. Fig. 20.
En décomposant cette force en deux autres dirigées suivant les axes rectangulaires Mx, My, si l'on donne l'angle α que cette force fait avec l'axe Mx, ses composantes seront évidemment

$$MC = MP\sin\alpha,\quad MD = MP\cos\alpha.$$

En admettant que les forces dirigées suivant Mx soient positives lorsqu'elles agissent de M en x, la composante MD sera positive. Si la force MP prend ensuite la position MP', l'angle α, mesuré par l'arc AP, augmentera, et le cosinus diminuera; de sorte que si la force MP tombe dans l'angle droit yMB, et devient MP'', son cosinus changera de signe; et l'on voit qu'en effet la composante de MP'', représentée par MD'', est alors négative, et tend à entraîner le point M dans un sens opposé à celui où elle le sollicitait quand la force avait la position MP, et que la composante était MD. Voilà donc deux forces, MD et MD'', qui sont de signes con-

traires; et l'on voit que pour déterminer ces signes, il suffit d'attribuer à cos α la valeur qui lui convient, eu égard à l'angle auquel il correspond. De cette manière, nous pourrons admettre que toutes les forces MP, MP', etc., qui sollicitent un point M, soient positives, pourvu qu'on choisisse convenablement le signe qui appartient au cosinus.

36. Si la force que nous considérons tombait, comme MP''', au-dessous de AB, il faudrait donc, en mesurant l'angle α par un arc ALBP''', considérer un angle plus grand que la demi-circonférence. Pour éviter cet inconvénient, nous conviendrons de mesurer les angles α et $\mathcal{C}$ indistinctement de chaque côté de leurs axes respectifs. Ainsi, lorsque notre force tombera au-dessous de AB, l'angle α sera mesuré, non par l'arc ALBP''', mais par l'arc AP''', qui a le même cosinus. De cette manière, nous n'emploierons plus que des arcs qui n'excéderont pas 200°. Il est vrai que quand on donnera l'angle α, comme il pourra être porté de A en P, ou de A en P''', il semble qu'on ne pourra plus distinguer entre elles les directions des forces MP et MP'''; mais tout doute cessera à cet égard si l'on fait attention que l'angle $\mathcal{C}$ déterminera ce choix, puisque cet angle est aigu pour la force MP, et obtus pour la force MP'''.

37. En général, de quelque manière que soit située notre force, comme elle doit tomber dans l'un des quatre angles droits formés autour du point M, elle ne peut prendre à l'égard de ces angles que l'une des quatre positions indiquées dans les fig. 21, 22, 23 et 24.

Dans la 1re, α et $\mathcal{C}$ aigus .... donnent cos α et cos $\mathcal{C}$ positifs,
Dans la 2me, α obtus et $\mathcal{C}$ aigu donnent cos α négatif et cos $\mathcal{C}$ positif,
Dans la 3me, α et $\mathcal{C}$ obtus..... donnent cos α et cos $\mathcal{C}$ négatifs,
Dans la 4me, α aigu et $\mathcal{C}$ obtus donnent cos α positif et cos α négatif.

On voit que tous ces angles sont mesurés chacun par un arc qui ne surpasse pas 200° (divis. centésimale).

38. Il est à remarquer que les signes de ces cosinus sont

ceux des coordonnées x et y du point B. Par exemple, lorsque le point B est situé dans l'angle $x'Ay$ (fig. 22), x est négatif et y positif, et l'on a aussi $\cos\alpha$ négatif et $\cos6$ positif.

39. Pour donner un exemple de la détermination des signes des cosinus, cherchons la résultante des forces P, P', P'', P''', P^{IV}, disposées comme dans la fig. 25, et qui toutes tendent à entraîner le point A; en attribuant le signe positif ou le signe négatif aux forces qui correspondent à des angles aigus ou obtus, les composantes Fig. 25.

$$\left.\begin{array}{l}\text{de P}\\ \text{de P}'\\ \text{de P}''\\ \text{de P}'''\\ \text{de P}^{\text{IV}}\end{array}\right\}\text{ seront }\left\{\begin{array}{ll}+P\cos\alpha, & +P\cos6,\\ +P'\cos\alpha', & -P'\cos6',\\ +P''\cos\alpha'', & -P''\cos6'',\\ -P'''\cos\alpha''', & -P'''\cos6''',\\ -P^{\text{IV}}\cos\alpha^{\text{IV}}, & +P^{\text{IV}}\cos6^{\text{IV}}.\end{array}\right.$$

On ajoutera les composantes qui agissent dans un sens, et l'on retranchera de cette somme celles qui agissent en sens contraire, et l'on obtiendra

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' - P'''\cos\alpha''' - P^{\text{IV}}\cos\alpha^{\text{IV}} = X,$$
$$P\cos6 + P^{\text{IV}}\cos6^{\text{IV}} - P'\cos6' - P''\cos6'' - P'''\cos6''' = Y. \quad \text{Fig. 25.}$$

40. Si l'on se réserve de déterminer les signes des cosinus lorsque l'on passera à la pratique, on peut donner à tous les cosinus le signe positif, et l'on aura en général

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = X\ldots(4),$$
$$P\cos6 + P'\cos6' + P''\cos6'' + \text{etc.} = Y\ldots(5).$$

41. La résultante étant la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés rectangulaires sont X et Y, sera donnée par l'équation

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = R\ldots\ldots(6).$$

Il ne s'agit plus que d'en déterminer la position. Pour cet effet, si nous nommons a et b les angles que cette résultante

fait avec les axes coordonnés, nous aurons

$$X = R\cos a,\quad Y = R\cos b,$$

d'où nous tirerons

$$\cos a = \frac{X}{R},\quad \cos b = \frac{Y}{R} \ldots\ldots (7).$$

Les seules données du problème étant P, P′, P″, etc., $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\alpha''$, etc., $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\beta''$, etc., ces données feront connaître X et Y, au moyen des équations (4) et (5). Ces valeurs étant substituées dans la formule (6), on aura la résultante R, et la position en sera déterminée par les équations (7).

42. La ligne de direction passant par le point A, aura pour équation celle d'une droite menée par l'origine. Cette équation sera donc

$$y = x\tang a,\quad \text{ou}\quad y = x\frac{\sin a}{\cos a};$$

changeant $\sin a$ en $\cos b$, parce que les angles a et b formés
Fig. 26. par la résultante R avec les axes Ax et Ay (fig. 26), sont complémens l'un de l'autre, nous obtiendrons

$$y = x\frac{\cos b}{\cos a},$$

et en mettant dans cette équation les valeurs de $\cos a$ et de $\cos b$ données par les équations (7), on aura

$$y = \frac{Y}{X}x.$$

43. Dans le cas de l'équilibre, l'intensité de la résultante R étant nulle, la formule (6) devient

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = 0,\quad \text{ou plutôt}\quad X^2 + Y^2 = 0.$$

Comme tout carré est essentiellement positif, et qu'une somme de quantités positives ne peut être égale à zéro, à

moins que chacune ne soit nulle séparément, on a

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Telles sont les équations de l'équilibre de plusieurs forces qui, étant situées dans un même plan, sont appliquées immédiatement à un point A.

44. Si X seul était nul, les équations 6 et 7 donneraient

$$R = \pm Y, \quad \cos a = 0, \quad \cos b = \pm 1.$$

Ce qui montre que la résultante serait dirigée suivant l'axe des y.

On prouverait de même que si Y seul était nul, la résultante serait dirigée suivant l'axe des x.

Observations générales sur les forces situées d'une manière quelconque dans l'espace.

45. Lorsque trois forces agissent d'une manière quelconque dans l'espace, et concourent en un point, elles donnent lieu à un théorème analogue au parallélogramme des forces, c'est celui de leur parallélipipède. La démonstration en est très facile. En effet, soient AP, AP′ et AP″, trois forces appliquées à un point A; si l'on prend les lignes AB, AC et AD (fig. 27), proportionnelles à ces forces, et que l'on construise le parallélipipède DE, on voit d'abord que la diagonale AE de la base de ce parallélipipède est la résultante des forces AC et AB. Remplaçant ces deux forces par AE, la résultante cherchée sera celle de AE et de AD, et se terminera à l'extrémité F de la droite FE parallèle et égale au côté AD : elle sera donc la diagonale AF du parallélipipède DE. Fig. 27.

46. Si les trois forces sont rectangulaires, l'angle AEB est droit, et nous avons

$$AE^2 = AB^2 + BE^2;$$

l'angle E du triangle AEF étant également droit, nous avons encore

$$AF^2 = AE^2 + FE^2.$$

Mettant pour AE^2 sa valeur donnée par la précédente équation, nous trouverons

$$AF^2 = AB^2 + BE^2 + FE^2.$$

Substituant les droites AC et AD à leurs parallèles BE et FE, et passant à la racine, nous obtiendrons enfin

$$AF = \sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2} \ (*),$$

ou

$$R = \sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2},$$

en désignant par R la résultante de nos trois forces.

47. De même que nous avons rapporté à deux axes rectangulaires les forces qui agissent dans un plan, de même nous rapporterons à trois axes rectangulaires les forces qui agissent dans l'espace. Ainsi ayant fixé trois axes rectangu-

Fig. 29. laires en un point quelconque O, nous mènerons (fig. 29), par le point d'application d'une force P, trois axes rectangulaires Ax, Ay et Az, parallèles aux axes coordonnés; et nommant α, β, γ, les angles que cette force P, représentée par AD, fait respectivement avec ces axes, la direction de cette force sera déterminée lorsque ces angles seront connus.

---

*) Cette formule revient à celle qui exprime la distance des points

Fig. 28. A et F (fig. 28); car soient x', y', z' les coordonnées du point A, et x, y, z celles du point F, on a

$$AB = PQ = IL = OL = OL - OI = x - x',$$
$$AC = BE = QH = HL - QL = HL - PI = y - y',$$
$$AD = FE = FH - EH = FH - AP = z - z';$$

substituant, il vient,

$$AF = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

48. Ces angles serviront également à faire connaître les composantes de P suivant les axes Ax, Ay et Az. En effet, DC étant perpendiculaire au plan yAx, l'angle DCA sera droit; donc le triangle rectangle ADC, dans lequel l'angle D adjacent au côté DC, est par hypothèse γ, nous donnera (*note* de l'art. 34) Fig. 29.

$$DC = AD \cos \gamma \ldots (8).$$

En considérant ensuite tour à tour les composantes AB et CB, on prouverait de même qu'on a

$$AB = AD \cos \alpha, \quad BC = AD \cos \beta \ldots (9);$$

mettant P à la place de AD, les trois composantes rectangulaires de P seront donc $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$ et $P \cos \gamma$.

49. Une propriété importante des axes rectangulaires est que, lorsque deux des trois angles α, β, γ; sont donnés, le troisième en résulte nécessairement. Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que le carré de la diagonale AD étant égal à la somme des carrés des trois composantes (art. 46), nous aurons

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 = AD^2.$$

Substituant dans cette équation les valeurs des termes du premier membre, données par les équations 9 et 8, et supprimant ensuite le facteur commun AD^2, il restera

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \ldots (10) \text{ (note seconde)}.$$

Cette équation nous donne

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \ldots (11);$$

et comme on tirerait des valeurs analogues pour les deux autres cosinus, il en résulte que l'un des trois angles que fait la direction de la force P avec les axes Ax, Ay et Az, est déterminé lorsque les deux autres le sont.

50. Le double signe qui affecte le radical de l'équation 11,

nous indique que le cosinus de l'un des angles, peut être positif ou négatif. Le premier cas arrive lorsque cet angle est aigu, et le second lorsqu'il est obtus.

Or, on verra facilement que l'angle γ sera aigu ou obtus, selon que la force P tombera au-dessus ou au-dessous du plan xAy, c'est-à-dire du côté des z positifs ou du côté des z négatifs.

La même observation s'applique aux cosinus des angles α et ζ, considérés relativement aux axes des x et des y. En général, les signes des cosinus seront les mêmes que ceux des coordonnées x, y, z comptées du point A.

51. On emploie encore pour déterminer les signes des cosinus, une règle qui est fondée sur l'art. 10. En effet, si Ax (fig. 30), indique la direction de l'une des composantes, cette composante sera positive ou négative, selon qu'elle agira de A vers x, ou de A vers x'. Dans le premier cas son effet est d'écarter le point A de l'origine O des coordonnées, et dans le second de l'en rapprocher. C'est sur cette considération qu'on a établi cette règle : *Une composante est positive lorsqu'elle tend à augmenter la coordonnée du point d'application A ; elle est au contraire négative lorsqu'elle tend à diminuer cette coordonnée.*

Fig. 30.

Des forces appliquées à un même point, et qui sont situées dans l'espace.

52. Soient P, P′, P″, etc., diverses forces qui sollicitent un point A ; menons par ce point les trois axes coordonnés Ax, Ay, Az, et nommons

α, ζ, γ les angles que P fait avec les axes coordonnés,
α', ζ', γ' les angles que P′ fait avec ces axes,
α'', ζ'', γ'' les angles que P″ fait avec ces axes,
etc. etc.

En décomposant ces forces suivant les axes coordonnés, nous

trouverons (art. 48)

$P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$ pour les composantes de P,
$P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$ pour celles de P',
$P'' \cos \alpha''$, $P'' \cos \beta''$, $P'' \cos \gamma''$ pour celles de P'',
etc. etc. etc. etc.

Si nous nous réservons, comme dans l'article (40), de déterminer les signes des cosinus lorsque nous passerons à la pratique, et que nous représentions par X, Y, Z les composantes de la résultante cherchée R suivant chacun des axes coordonnés, nous aurons

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = X \ldots (12),$$
$$P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} = Y \ldots (13),$$
$$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} = Z \ldots (14).$$

53. X, Y, Z étant les trois projections AB, BC, CD de la droite AD (fig. 29) qui représente la résultante R, nous aurons (art. 46) Fig. 29.

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 = AD^2,$$

et par conséquent

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2.$$

Ainsi l'on déterminera l'intensité de la résultante au moyen de l'équation

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \ldots (15).$$

D'une autre part, si nous appelons a, b, c les angles que la résultante fait avec les axes coordonnés, les composantes de R suivant chacun des axes, seront

$$R \cos a, \quad R \cos b, \quad R \cos c;$$

et comme nous avons représenté par X, Y, Z ces composantes, nous aurons

$$X = R \cos a, \quad Y = R \cos b, \quad Z = R \cos c,$$

Fig. 29. d'où nous tirerons

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R} \ldots (16).$$

Lorsque les forces P, P′, P″, etc., et les angles α, $\mathcal{C}$, γ, α', $\mathcal{C}'$, γ', etc., seront donnés, les formules (12), (13) et (14) nous mettront en état de calculer X, Y et Z. Ces valeurs étant substituées dans l'équation (15), nous feront connaître R. On pourra donc ensuite, au moyen des équations (16), déterminer les angles a, b, c qui fixent la position de la résultante.

54. Dans le cas de l'équilibre, la résultante étant nulle, l'équation (15) nous donne

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Cette équation est la somme de trois carrés qui sont tous essentiellement positifs; par conséquent elle n'est possible que d'autant que chaque terme soit égal à zéro. Ainsi l'on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0:$$

ces valeurs réduisent les équations (12), (13) et (14) à

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.} = 0 \\ P\cos\mathcal{C} + P'\cos\mathcal{C}' + P''\cos\mathcal{C}'' + P'''\cos\mathcal{C}''' + \text{etc.} = 0 \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (17).$$

Telles sont les équations d'équilibre d'un système de forces situées d'une manière quelconque dans l'espace et appliquées à un même point.

55. Ces conditions étant remplies, on va prouver que l'une des forces est égale et directement opposée à la résultante des autres. En effet, soient R′ la résultante de toutes les forces hors P cos α, X′, Y′, Z′ ses composantes, et a', b', c' les angles qu'elle fait avec les trois axes, on a

$$X' = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.},$$ Fig. 32.
$$Y' = P' \cos 6' + P'' \cos 6'' + P''' \cos 6''' + \text{etc.},$$
$$Z' = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.}:$$

au moyen de ces valeurs, on réduira les équations (17) à

$$P \cos \alpha + X' = 0,$$
$$P \cos 6 + Y' = 0,$$
$$P \cos \gamma + Z' = 0;$$

éliminant X', Y', Z' au moyen des équations

$$X' = R' \cos a', \quad Y' = R' \cos b', \quad Z' = R' \cos c',$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l} P \cos \alpha = - R' \cos a' \\ P \cos 6 = - R' \cos b' \\ P \cos \gamma = - R' \cos c' \end{array}\right\} \ldots (18).$$

Élevant ces équations au carré et les ajoutant, on trouvera

$$P^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 6 + \cos^2 \gamma) = R'^2 (\cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c');$$

et comme la somme des carrés des cosinus des angles qu'une force fait avec les trois axes est égale à l'unité, cette équation se réduit à

$$P^2 = R'^2,$$

et donne

$$P = R';$$

on ne prend ici P qu'avec le signe positif, parce que les signes qui affectent les forces dépendant de leurs positions respectives, doivent être déterminés par la règle des cosinus que nous avons expliquée art. 35 et suivans.

Substituant la valeur de P dans les équations (18), et supprimant ensuite le facteur R', ces équations deviennent

$$\cos \alpha = - \cos a' \ldots (19),$$
$$\cos 6 = - \cos b' \ldots (20),$$
$$\cos \gamma = - \cos c' \ldots (21).$$

Si l'on fait $\cos a' = m$, l'équation (19) nous donne

$$\cos \alpha = -m.$$

Ces valeurs de $\cos a'$ et de $\cos \alpha$ nous apprennent que les angles a' et α sont supplémens l'un de l'autre. En effet, si $\cos a'$
Fig. 31. est représenté par AC (fig. 31), $\cos \alpha$ le sera par $AC' = AC$, et alors $a' = DAC$, $\alpha = D'AC$.

Or ces angles sont supplémens l'un de l'autre; car, à cause de $AC = AC'$, l'égalité des triangles ADC, D'AC' nous prouvant celle des angles DAC, D'AC', on peut changer D'AC' en DAC dans l'équation

$$D'AC + D'AC' = 2 \text{ angles droits};$$

et l'on voit que les angles D'AC et DAC ou a' et α sont supplémens l'un de l'autre.

On prouverait de même, au moyen des équations (20) et (21), que 6 et b' sont supplémens l'un de l'autre, et qu'il en est de même des angles γ et c'.

Il résulte de ce qui précède, que R' et P sont directement opposés; car si, par exemple, R' était situé au-dessus du plan des x, y dans la région des x et des y positifs, P serait situé au-dessous, et dans la région des x et des y négatifs.

56. Après avoir réduit toutes les forces à trois forces rectangulaires X, Y, Z, nous avons vu (art. 45) que la résultante R était la diagonale d'un parallélipipède dont les côtés contigus AB, AC, AD (fig. 27) seraient X, Y, Z: par conséquent pour déterminer l'équation de la résultante R représentée par AF, il s'agit de trouver celle d'une droite AF qui passerait par l'origine A dont les coordonnées sont nulles, et par le point F qui a pour coordonnées X, Y, Z.

57. On peut donner plus de généralité à ce problème, en supposant que le point d'application A ait pour coordon-
Fig. 32. nées x', y', z'; alors les coordonnées du point F (fig. 32)

seront

$$x' + X, \quad y' + Y, \quad z' + Z.$$

Cela posé, les équations de la résultante étant celles d'une droite dans l'espace, sont de la forme (*Théorie des Courbes*, art. 413)

$$z = ax + b, \quad z = a'y + b' \ldots (22);$$

mettant dans ces équations les coordonnées du point F à la place de x, y, z, nous trouverons

$$z' + Z = ax' + aX + b, \quad z' + Z = a'y' + a'Y + b' \ldots (23):$$

les coordonnées x', y', z' du point A devant aussi satisfaire aux équations (22), nous aurons

$$z' = ax' + b, \quad z' = a'y' + b' \ldots (24).$$

Retranchant ces équations des équations (23), nous obtiendrons

$$Z = aX, \quad Z = a'Y,$$

d'où nous tirerons

$$a = \frac{Z}{X}, \quad a' = \frac{Z}{Y}.$$

D'une autre part, éliminant b et b' entre les équations (22) et (24), nous aurons

$$z - z' = a(x - x'), \quad z - z' = a'(y - y'):$$

mettant dans ces équations les valeurs de a et de a', il viendra enfin pour les équations de la résultante (*note troisième*)

$$z - z' = \frac{Z}{X}(x - x'), \quad z - z' = \frac{Z}{Y}(y - y').$$

Des conditions d'équilibre lorsque le point auquel diverses forces sont appliquées, est assujéti à rester constamment sur une surface dont l'équation est donnée.

58. Jusqu'à présent nous avons supposé que le point matériel, auquel sont appliquées les forces P, P', P", etc., était libre lorsqu'on le soumettait à l'action de ces forces; si, au contraire, il était assujéti à rester constamment sur une même surface, il suffirait que la résultante au lieu d'être nulle, comme l'indiquent les équations (17), fût normale à la surface donnée. Mais si elle avait une autre direction, en la décomposant en deux forces, l'une tangente à la surface, et l'autre normale; la première tendrait à faire glisser le point matériel, et la seconde serait détruite par la résistance de la surface.

Il suit de ce qui précède, qu'en regardant la résistance de la surface comme une force qui agirait sur le point matériel suivant la normale à cette surface, si l'on représente cette force par N et que l'on en connaisse l'intensité ainsi que les angles θ, θ', θ'', qu'elle forme avec les axes coordonnés, il ne faudra qu'ajouter aux équations d'équilibre (17), les composantes $N\cos\theta$, $N\cos\theta'$, $N\cos\theta''$, pour passer à l'hypothèse où le point matériel serait assujéti à rester constamment sur une surface courbe, ce qui fournira les équations,

$$N\cos\theta + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0,$$
$$N\cos\theta' + P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.} = 0,$$
$$N\cos\theta'' + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{etc.} = 0.$$

59. Nous simplifierons ces équations en représentant, comme dans l'art. 52, par X, par Y et par Z les sommes des composantes parallèles chaque axe, et ces équations deviendront

$$N\cos\theta + X = 0,\quad N\cos\theta' + Y = 0,\quad N\cos\theta'' + Z = 0\ldots \quad (25).$$

60. Il s'agit maintenant de déterminer les inconnues $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\theta''$, et N. Pour cet effet, soit $L=0$ l'équation de la surface, et x' y', z', les coordonnées du point matériel auquel sont appliquées ces forces, et qui est retenu sur cette surface; la normale étant une ligne droite qui passe par le point x', y', z', ses équations (*voyez* ma Théorie des courbes du 2e ordre, page 262) seront

$$x - x' = a(z - z'),\quad y - y' = b(z - z')\ldots \quad (26).$$

Les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, qui entrent dans ces équations,

n'étant autre chose que les projections de notre droite sur les axes coordonnés, cherchons les relations qui existent entre ces projections et les angles θ, θ', θ''. Pour cela, soit MN (fig. 33) notre droite donnée dans l'espace, et rapportée aux trois axes rectangulaires réunis à un point O pris pour origine, et nommons x', y', z', x, y, z, les coordonnées des points M et N ; si, par les coordonnées Fig. 33.

$$MD = z', \quad BD = y' \text{ et } NE = z, \quad EC = y,$$

on fait passer les plans DF et EG, ces plans seront parallèles à celui des y, z ; et comme la distance qui les sépare est mesurée par la partie interceptée $BC = x - x'$ de l'axe des x, et que toute parallèle à cet axe doit être perpendiculaire aux deux plans, il s'ensuit qu'en menant de l'extrémité M de la coordonnée z', la parallèle MP à l'axe des x, cette parallèle sera perpendiculaire au plan EG, et le rencontrera à une distance $MP = x - x'$.

Or, si l'on unit le point P au point N, où la droite MN rencontre le plan EG, on formera le triangle MNP, rectangle en P, puisque MP est perpendiculaire au plan EG. Or, dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle étant égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de cet angle, nous aurons

$$MP = MN \cdot \cos M,$$

ou

$$x - x' = MN \cos\theta ;$$

mais MN étant une droite qui passe par les points x, y, z et x', y', z', on sait (*voyez* la note de la page 20) qu'elle a pour expression

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation précédente, nous en tirerons

$$\cos\theta = \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}};$$

menant ensuite par les coordonnées x, z, x', z' et x, y, z', y' des plans parallèles aux plans XOZ et XOY, on trouvera de même

$$\cos\theta' = \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

$$\cos\theta'' = \frac{z-z'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}};$$

éliminant les valeurs de $x - x'$ et de $y - y'$, à l'aide des équations (26), et supprimant ensuite $z - z'$, qui devient facteur commun, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\theta' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\theta'' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.\end{array}\right\}\ldots (27).$$

61. Ces valeurs, qui déterminent la position de la normale, ne sont pas encore connues, puisque les quantités a et b, qui entrent dans leurs expressions, ne sont que des signes généraux. Cherchons donc à déterminer ces quantités a et b d'une manière plus particulière. Pour cela, soit $L=0$ l'équation de la surface qui passe par le point x', y', z'; si l'on mène par ce point un plan tangent à cette surface, l'équation de ce plan sera en général (*Théorie des Courbes*, page 275)

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

et devant être satisfaite par les coordonnées x', y', z', elle nous donnera

$$Ax'+By'+Cz'+D=0.$$

Éliminant D, l'équation du plan tangent à notre point x', y', z', sera

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

et, en divisant par C, nous mettrons cette équation sous cette forme

$$\frac{A}{C}(x-x')+\frac{B}{C}(y-y')+(z-z')=0\ldots (28).$$

Par la condition de tangence à la surface $L=0$ (*voyez* mes Élémens de Calcul différentiel, pages 54, 4[e] édit. et 56, 5[e] édit.), il faudra qu'en tirant les valeurs de $\frac{dz'}{dx'}$ et de $\frac{dz'}{dy'}$ de l'équation de cette surface, on ait

$$-\frac{A}{C}=\frac{dz'}{dx'}, \quad -\frac{B}{C}=\frac{dz'}{dy'}\ldots (29).$$

Or, on sait par la Géométrie analytique (*Théorie des Courbes*, page 279) que lorsqu'un plan dont l'équation est $Ax+By+Cz+D=0$, doit être perpendiculaire à la droite qui a pour équations $x=az+\alpha$, $y=bz+6$, il faut que l'on ait $\frac{A}{C}=a$, $\frac{B}{C}=b$; donc les équations (29) se réduisent à

$$-a=\frac{dz'}{dx'}, \quad -b=\frac{dz'}{dy'}\ldots (30).$$

62. Il ne s'agit plus que de déterminer les valeurs de ces coefficiens

différentiels, au moyen de l'équation de la surface. Pour cela, on obtient, en différentiant cette équation,

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = 0;$$

par conséquent on en tire

$$dz = -\frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}}dx - \frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}}dy;$$

accentuant x, y, z, pour marquer que l'on considère le point de tangence, on trouve

$$\frac{dz'}{dx'} = -\frac{\frac{dL}{dx'}}{\frac{dL}{dz'}},\quad \frac{dz'}{dy'} = -\frac{\frac{dL}{dy'}}{\frac{dL}{dz'}};$$

substituant ces expressions dans les équations (30), on obtient

$$a = \frac{\frac{dL}{dx'}}{\frac{dL}{dz'}},\quad b = \frac{\frac{dL}{dy'}}{\frac{dL}{dz'}}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (27), et réduisant, on a enfin

$$\cos\theta = \frac{\frac{dL}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\frac{dL}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}},$$

$$\cos\theta'' = \frac{\frac{dL}{dz'}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}}.$$

Ces équations étant sous des formes peu commodes pour le calcul, on les simplifiera en faisant

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}} = V \ldots (31),$$

ce qui les réduira à

$$\cos\theta = V\frac{dL}{dx'},\quad \cos\theta' = V\frac{dL}{dy'},\quad \cos\theta'' = V\frac{dL}{dz'};$$

substituant ces valeurs des cosinus dans les équations (25), on aura

$$NV\frac{dL}{dx'} + X = 0,\quad NV\frac{dL}{dy'} + Y = 0,\quad NV\frac{dL}{dz'} + Z = 0 \ldots\ldots\ (32).$$

63. Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de N. Or, c'est ce qui est très facile, car, en faisant passer X, Y, Z dans les seconds membres des équations (32) et élevant ensuite ces équations au carré, on obtiendra, en réunissant leur somme,

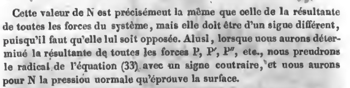
$$N^2V^2\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right] = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

et, en réduisant au moyen de l'équation (31) il restera

$$N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

d'où l'on tirera

$$N = \pm\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.\ .\ (33).$$



Cette valeur de N est précisément la même que celle de la résultante de toutes les forces du système, mais elle doit être d'un signe différent, puisqu'il faut qu'elle lui soit opposée. Ainsi, lorsque nous aurons déterminé la résultante de toutes les forces P, P', P'', etc., nous prendrons le radical de l'équation (33) avec un signe contraire, et nous aurons pour N la pression normale qu'éprouve la surface.

64. Si la force normale est dans la direction de l'axe des z, on a

$$\theta = 100^\circ,\quad \theta' = 100^\circ,\quad \theta'' = 0 \text{ ou } \theta'' = 200^\circ,\quad \text{(div. centésim.)}$$

et par conséquent

$$\cos\theta = 0,\quad \cos\theta' = 0,\quad \cos\theta'' = \pm 1,$$

et les équations (25) se réduisent à

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad \pm N + Z = 0,$$

ce qui nous montre que les composantes, dans le sens du plan tangent, se détruisent, et que la force normale doit contrebalancer l'effort de toutes les forces dirigées suivant l'axe des z.

65. Enfin, la nature du problème peut être telle, qu'on ne nous donne que les forces P, P', P'', etc., et l'équation de la surface, et qu'on demande où doit être situé le point d'application x', y', z', de toutes ces forces, dans le cas de l'équilibre.

Pour résoudre cette question, on éliminera d'abord N au moyen des équations (32), le facteur V disparaîtra en même temps, et l'on aura

$$Z\frac{dL}{dx'} = X\frac{dL}{dz'},\quad Z\frac{dL}{dy'} = Y\frac{dL}{dz'};$$

ces équations, jointes à l'équation $L = o$, suffiront pour déterminer les coordonnées, x', y', z', du point d'application cherché.

Des conditions d'équilibre lorsque le point auquel sont appliquées diverses forces est assujéti à rester constamment sur deux surfaces courbes, ou sur une courbe à double courbure.

66. Un point matériel retenu sur deux surfaces, ne peut rester en repos à moins que la force qui le sollicite ne puisse se décomposer en deux autres qui soient respectivement normales à chacune des surfaces données; car si l'une de ces composantes avait une différente direction, on pourrait la décomposer en deux forces, la première normale à l'une des surfaces, et la seconde tangente à la même surface; et l'on sent que cette dernière ferait glisser le point matériel.

Cela posé, soient donc N et M les deux forces normales, et θ, θ', θ'', π, π', π'', les angles que leurs directions font avec les trois axes rectangulaires menés au point d'application ; en opérant de la même manière que dans l'article 59, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta + M\cos\pi + X &= o \\ N\cos\theta' + M\cos\pi' + Y &= o \\ N\cos\theta'' + M\cos\pi'' + Z &= o \end{aligned}\right\}\ldots (34).$$

Les équations $L = o$ et $K = o$ étant différentiées, nous feront connaître, comme dans l'article 62, les valeurs des quantités $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\theta''$, $\cos\pi$, $\cos\pi'$, $\cos\pi''$; et, en nous servant d'abréviations analogues à celles que nous avons employées art. 63, nous supposerons

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}} = V,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dK}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dK}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dK}{dz'}\right)^2}} = U,$$

et nous aurons

$$\cos\theta = V\frac{dL}{dx'},\quad \cos\pi = U\frac{dK}{dx'},$$
$$\cos\theta' = V\frac{dL}{dy'},\quad \cos\pi' = U\frac{dK}{dy'},$$
$$\cos\theta'' = V\frac{dL}{dz'};\quad \cos\pi'' = U\frac{dK}{dz'}.$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations (34) nous trouverons

$$\left.\begin{array}{l} NV\,\frac{dL}{dx'} + MU\,\frac{dK}{dx'} + X = o \\ NV\,\frac{dL}{dy'} + MU\,\frac{dK}{dy'} + Y = o \\ NV\,\frac{dL}{dz'} + MU\,\frac{dK}{dz'} + Z = o \end{array}\right\} \ldots(35).$$

Au moyen de ces trois équations, nous pourrons éliminer les inconnues N et M; et si l'on fait attention que V et U y entrent de la même manière que ces quantités, ils disparaîtront avec elles. Pour plus de simplicité, nous pouvons regarder NV et MU comme deux inconnues qu'on éliminera entre ces trois équations, ce qui nous conduira à une équation de condition qui renfermera une ou plusieurs de nos variables. Cette équation combinée avec celles-ci $L = o$, $K = o$, suffira pour déterminer les coordonnées x', y', z' du point cherché.

Il n'est pas inutile de faire observer que les radicaux, qui pouvaient compliquer nos opérations, et qui étaient susceptibles du double signe, auront disparu du calcul avec les quantités V et U qui les renferment.

67. Lorsque le point donné est assujéti à rester sur une courbe à double courbure, cette courbe sera donnée par l'intersection de deux surfaces; alors $L = o$ et $K = o$ étant les équations de ces surfaces, les coordonnées des points où elles se rencontrent appartiendront également aux deux surfaces. Donc il faudra regarder x, y, z, que nous accentuerons, comme les mêmes dans ces équations. Nous avons encore entre ces coordonnées l'équation de condition dont nous avons parlé (art. 66); par conséquent, si, de ces trois équations, nous éliminons successivement deux des coordonnées, la troisième sera exprimée en une certaine fonction de quantités connues; et, en appelant A, B, C les valeurs de cette fonction, correspondantes à chacune des coordonnées, nous aurons

$$x' = A, \quad y' = B, \quad z' = C.$$

68. Il peut arriver que l'équation qui résulte de l'élimination de N et de M ne contienne aucune variable. Ce cas a lieu lorsque les équations $L = o$ et $K = o$ étant celles d'un plan, sont de la forme..... $Ax + By + Cz + D = o$; car alors elles ne donnent que des constantes pour les coefficiens différentiels. Dans cette circonstance, les valeurs des intensités de N et de M, déterminées par les équations (35), deviennent indépendantes des coordonnées x', y', z'; et comme ces coordonnées subsistent néanmoins entre les équations des deux plans, on voit qu'en quelque endroit de leur commune section que soit placé le point de concours des forces, les conditions d'équilibre pourront être remplies. Une observation analogue peut être faite à l'art. 65.

Des forces parallèles.

69. Les forces dont nous venons de déterminer les conditions d'équilibre dans les paragraphes précédens, étaient supposées n'agir que sur un seul point; mais si elles sont appliquées à différens points d'un corps ou système de corps, ces points seront maintenus à des distances fixes par les autres points qui occupent les vides du corps, de sorte que si l'on fait abstraction de ces points intermédiaires, on pourra concevoir les points d'application comme liés entre eux par des droites inflexibles.

70. Considérons maintenant deux forces parallèles P et Q (fig. 35) appliquées aux extrémités d'une droite AB qui coupe leurs directions à angle droit. Nous avons vu, article 22, que pour que ces forces se fissent équilibre, il fallait que la résultante fût égale à leur somme, et que son point d'application O divisât la ligne AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux intensités de ces forces. C'est une proposition qui peut encore se démontrer de la manière suivante, lorsqu'on admet celle du parallélogramme des forces : Pour cela, représentons (fig. 34) ces forces par les droites AP et BQ qui leur soient proportionnelles; on peut ajouter au système les forces AM et BN égales et directement opposées, et substituer aux quatre forces AP, AM, BQ et BN, les diagonales AD et BI. Ces diagonales concourant au point C, il est permis de transporter AD et BI en ce point, en prenant CE = AD et CF = BI. Décomposant ces forces CE et CF en deux autres rectangulaires, on construira les rectangles GL et HK qui seront égaux aux rectangles MP et QN; et au lieu des forces CE et CF, on aura les quatre forces CL, CK, CG et CH. Ces deux dernières sont égales comme équivalentes aux forces AM et BN qui sont égales par hypothèse; et, parce qu'elles agissent en sens con-

Fig. 35.

Fig. 34.

Fig. 34. traires, elles se détruiront; il ne restera donc au point C que les deux forces CL et CK égales à P et à Q, et qui, agissant dans la même direction et dans le même sens, s'ajouteront. Représentons leur somme par R, nous aurons donc

$$P + Q = R;$$

la résultante R pouvant être appliquée à tout point de sa direction, appliquons-la au point O dont nous allons chercher la distance en A. Pour cela, les triangles CAO, CEL donnent

$$CO : AO :: CL : EL;$$

pareillement on tire des triangles semblables COB, CKF,

$$OB : CO :: KF : CK;$$

multipliant ces proportions par ordre, et supprimant le facteur commun CO, nous aurons

$$OB : AO :: CL \times KF : EL \times CK.$$

Les droites KF et EL étant égales aux forces BN et AM qui sont ajoutées au système, cette proportion se réduit à

$$OB : AO :: CL : CK;$$

et comme CL et CK équivalent aux droites AP et BQ qui représentent les intensités des forces, notre proportion revient à

$$OB : AO :: P : Q \ldots (36).$$

Par conséquent le point d'application O de la résultante de P et de Q divise AB en deux parties OB et AO, réciproquement proportionnelles aux intensités de ces forces.

Fig. 35. 71. La proportion précédente donne (fig. 35)

$$OB + AO : AO :: P + Q : Q,$$

ou

$$AB : AO :: R : Q \ldots (37).$$

On déduit des proportions (36) et (37)

$$Q : P : R :: AO : OB : AB;$$

ce qui nous fournit cette règle : *Les parties* AO, OB, AB, *comprises chacune entre deux des forces* P, Q *et* R, *sont proportionnelles aux troisièmes*.

Par exemple, le terme correspondant à AB est R, parce que AB est compris entre les deux autres forces P et Q.

72. Si l'on donnait P, Q et AO, et qu'on voulût connaître BO, on verrait que les termes correspondans à AO et à BO sont Q et P, parce que AO est compris entre R et P, et que BO l'est entre R et Q ; on établirait donc ainsi la proportion

$$Q : P :: AO : BO,$$

d'où l'on tirerait

$$BO = \frac{P \times AO}{Q}.$$

73. Réciproquement si l'on n'avait qu'une force R, et qu'on voulût la partager en deux autres qui dussent passer par les points A et B, en nommant P et Q ces forces inconnues ; les termes correspondans à R et à P seraient AB et BO : on déterminerait donc P par la proportion

$$AB : BO :: R : P;$$

de même en cherchant les termes correspondans à R et à Q, on déterminerait Q par cette autre proportion

$$AB : AO :: R : Q.$$

On tirerait de ces deux proportions

$$P = \frac{R \times BO}{AB}, \quad Q = \frac{R \times AO}{AB}.$$

Dans la démonstration précédente, on a supposé que les directions AP et BQ (fig. 35) des forces P et Q étaient perpendiculaires à la droite AB ; mais si elles étaient obliques à cette droite, on pourrait, par le point d'application O de la résultante (fig. 36), mener CD perpendiculaire à la direction Fig. 36.

de ces forces; alors la force P appliquée en A, aurait le même effet que si elle était appliquée en C. Il en serait de même de la force Q à l'égard du point D; et, comme on a la proportion

$$P : Q :: OD : OC,$$

le rapport de OD à OC étant le même que celui de OB à OA à cause des triangles semblables OBD, COA, on aurait donc

$$P : Q :: OB : OA.$$

Fig. 37. 74. Lorsque deux forces P et Q (fig. 37) agissent en sens opposés, la résultante est égale à la différence de ces forces. Pour le démontrer, soit S (fig. 37) la résultante de deux forces P et R qui agissent dans le même sens, nous aurons

$$S = P + R \ldots (38);$$

remplaçant S par une force Q qui lui soit égale et qui agisse en sens contraire, l'équilibre subsistera entre les trois forces P, R et Q; par conséquent on pourra considérer R comme la résultante de Q et de P, et l'équation (38) nous donnera, pour obtenir l'intensité de R,

$$R = S - P;$$

et comme S et Q ont la même intensité, en substituant Q à S, on trouvera

$$R = Q - P.$$

D'après ce qui précède, le point O où la force R doit être appliquée, se déterminera par la proportion

$$AB : BO :: R : Q,$$

d'où l'on tirera

$$BO = \frac{Q \times AB}{R},$$

ou, en mettant pour R sa valeur,

$$BO = \frac{Q \times AB}{Q - P}.$$

Ce résultat nous apprend que plus la différence $Q - P$ est petite, plus O est éloigné de B; donc dans le cas où Q et P sont égaux, BO est infini et R nul; d'où nous conclurons qu'avec deux forces parallèles, égales et non directement opposées, on ne peut établir l'équilibre qu'au moyen d'une force infiniment petite transportée à une distance infinie : donc, dans ce cas, il est impossible de trouver une force qui fasse équilibre à P et à Q; ou, en d'autres termes, P et Q ne peuvent avoir une résultante unique : ces forces n'auront d'autre effet que de faire tourner AB autour de son milieu.

75. Des forces parallèles égales, et non appliquées à un même point, sont ce que M. Poinsot appelle *couple*.

76. On peut appliquer à un nombre quelconque de forces parallèles, la théorie que nous venons d'exposer. Soient donc P, P', P'', P''', P^{IV}, etc. (fig. 38) des forces parallèles appliquées à différens points A, B, C, D, E liés entre eux par des droites inflexibles; il sera facile de trouver la résultante de ces forces et son point d'application. En effet, on cherchera d'abord le point d'application M de la résultante des forces P et P' par la proportion Fig. 38.

$$AB : AM :: P + P' : P',$$

et l'on en déduira

$$AM = \frac{AB \times P'}{P + P'} :$$

on mènera ensuite une droite MC, et l'on cherchera le point d'application N de la résultante des forces $P + P'$ appliquées en M, et de la force P'' appliquée en C, par la proportion

$$MC : MN :: P + P' + P'' : P'',$$

et l'on aura

$$MN = \frac{MC \times P''}{P + P' + P''} ;$$

en menant ensuite ND, et cherchant par le même procédé le point d'application de la résultante des forces $P + P' + P''$ appliquées en N, et de la force P''' appliquée en D, on trouvera le point O par lequel doit passer cette résultante ; enfin on tirera la ligne OE, et par une semblable opération, on connaîtra le point d'application K de la résultante de toutes ces forces.

77. Si quelques-unes des forces sont dirigées en sens contraires, soient P, P′, P″, etc., les forces qui agissent dans un sens, et Q, Q′, Q″, etc., celles qui agissent en sens opposé ; nous chercherons par le procédé de l'article précédent, le
Fig. 39. point d'application K (fig. 39) de la résultante des forces P, P′, P″, etc., et le point d'application L de la résultante des forces Q, Q′, Q″, etc.; alors le système se trouvera réduit à deux forces parallèles, l'une appliquée en K et égale à $P + P' + P''$, etc., et l'autre appliquée en L et égale à $Q + Q' + Q''$, etc., et l'on cherchera la résultante de ces forces et son point d'application, comme dans l'article 74.

Fig. 40. 78. Si les forces P, P′, P″, P‴, etc. (fig. 40) restant toujours parallèles et appliquées aux mêmes points, prennent les positions AQ, BQ′, CQ″, DQ‴, etc., la résultante ne changera pas de point d'application ni d'intensité, mais deviendra seulement parallèle à la nouvelle direction des forces ; car l'opération qui a fait trouver le point d'application de la résultante, ne dépendant que des intensités des forces et des distances respectives des différens points d'application, les données restent les mêmes lorsqu'on change la direction commune des forces.

79. Par exemple, si les forces P et P′ prennent les directions parallèles AQ, BQ′, on a P, P′ et AB pour déterminer le point M, et l'on voit que les données sont les mêmes que lorsque les forces avaient les directions AP et BP′, ainsi de suite.

Le point par lequel passe la résultante de toutes les forces parallèles, quelle que soit leur inclinaison commune, est appelé le centre des forces parallèles.

80. Cherchons maintenant les coordonnées du centre des forces parallèles. Pour cet effet soient M, M′, M″, etc., les points d'application des forces P, P′, P″, etc.

x, y, z les coordonnées du point M,
x', y', z'.........celles du point M′,
x'', y'', z''.........celles du point M″,
....
x_1, y_1, z_1.........celles du centre des forces parallèles;

et représentons par N (fig. 41) le point d'application de la résultante des forces parallèles P et P′, nous aurons Fig. 41.

$$MM' : M'N :: P + P' : P;$$

d'une autre part les triangles semblables ML′M′, NLM′ nous donnent

$$MM' : M'N :: ML' : NL.$$

On tire de ces deux proportions

$$ML' : NL :: P + P' : P;$$

donc

$$(P + P')\,NL = P \times ML';$$

ajoutons dans les deux membres $(P + P')\,LK$, on aura

$$(P + P')(NL + LK) = P(ML' + LK) + P'.LK;$$

et, observant qu'on a

$$NL + LK = NK,$$
$$ML' + LK = MH,$$
$$LK = M'H',$$

l'équation précédente se réduit à

$$(P + P')\,NK = P.MH + P'.M'H',$$

Fig. 42. et si l'on désigne par Q la résultante des forces P, P′ (fig. 42), et par Z l'ordonnée de son point d'application, cette équation deviendra

$$QZ = Pz + P'z';$$

nommant ensuite Q′ la résultante des forces parallèles Q et P″, et Z′ l'ordonnée du point d'application de Q′, on aura encore

$$Q'Z' = QZ + P''z'',$$

et en mettant la valeur de QZ, on obtiendra

$$Q'Z' = Pz + P'z' + P''z''.$$

En continuant la même opération, on voit que si l'on représente par R la résultante de toutes les forces parallèles P, P′, P″, etc., et par z_1 l'ordonnée de son point d'application, dans le sens des z, on aura en général

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}\ldots \quad (39).$$

81. Le moment d'une force par rapport à un plan, est le produit de l'intensité de cette force par la distance de son point d'application à ce plan. L'équation précédente nous indique donc que le moment de la résultante des forces P, P′, P″, etc., par rapport au plan des x, y, est égale à la somme des momens de ces forces par rapport au même plan.

En prenant les momens par rapport aux deux autres plans coordonnés, on aura encore

$$Ry_1 = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}\ldots \quad (40),$$
$$Rx_1 = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}\ldots \quad (41).$$

82. Lorsque l'on connaîtra les coordonnées x, y, z; x', y', z', etc., des points d'application, et les intensités P, P′, P″, etc., des forces, on connaîtra aussi la résultante R qui est égale à la somme de ces intensités; et l'on pourra calculer les valeurs des coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre des forces parallèles.

83. A l'égard des signes, nous affecterons du signe positif les forces qui agissent dans un sens, et du signe négatif celles qui agissent dans un autre; et, comme les coordonnées sont positives ou négatives selon qu'elles tombent d'un côté ou de l'autre de l'origine, nous donnerons le signe positif à un moment dans lequel la force et celle des coordonnées qui la multiplie, sont de mêmes signes, et le signe négatif à un moment dans lequel ces quantités seraient de signes contraires.

84. Si les points d'application M, M', M'', M''', etc., sont dans un même plan MM'' (fig. 42), on peut disposer les plans coordonnés de manière que le plan des x, y soit parallèle à ce plan; alors toutes les coordonnées z, z', z'', etc., étant comprises entre le plan MM'', et le plan des x, y, on aura Fig. 42.

$$z = z' = z'' = z''', \text{ etc.};$$

et si nous représentons par z_1 l'ordonnée du centre des forces parallèles, l'ordonnée z_1 vaudra aussi z; car l'extrémité de z_1 sera dans le plan MM'', ainsi qu'on peut s'en assurer par une construction semblable à celle de l'article (74), construction qui n'exige que des lignes tirées dans le plan MM''. Alors z devenant facteur commun, l'équation (37) se réduit à

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.}$$

85. Si les points d'application des forces étaient sur une même droite AB (fig. 43) qu'on pourrait supposer parallèle à l'un des axes, à celui des x, par exemple, on aurait à la fois Fig. 43.

$$z = z' = z'' = z''' = \text{etc.} \quad \text{et} \quad y = y' = y'' = y''' = \text{etc.},$$

et les équations (39) et (40) se réduiraient à

$$R = P + P' + P'' + P''' + \text{etc.} \ldots (42),$$

et il ne resterait plus que celle-ci,

$$Rx_1 = Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.} \ldots (43).$$

Dans ce cas, on pourrait se dispenser de prendre trois axes rectangulaires; il suffirait de compter les x sur la ligne AB.

Fig. 43. Par exemple, si l'on avait

$$x' = 9,\quad x'' = 3,\quad x''' = -3,\quad x'''' = -4,$$
$$P' = -\tfrac{1}{3}P,\quad P'' = -\tfrac{2}{3}P,\quad P''' = 2P;$$

en mettant ces valeurs dans les équations (42) et (43), on trouverait

$$R = P - \tfrac{1}{3}P - \tfrac{2}{3}P + 2P = 2P,$$
$$Rx_1 = 9P - P + 2P - 8P = 2P;$$

d'où l'on déduirait

$$x_1 = 1.$$

86. Cherchons maintenant les conditions d'équilibre des forces parallèles. Comme on peut toujours disposer des plans coordonnés de la manière la plus convenable au problème, nous supposerons l'axe des z parallèle à la direction des forces. Cela posé, ayant réduit toutes les forces qui agissent dans un
Fig. 44. sens, à une seule résultante $R_{,}$ (fig. 44), et toutes celles qui agissent en sens contraires, à une autre résultante $R_{,,}$, il y aura équilibre dans le système, si ces deux résultantes sont directement opposées et égales en intensité, quoique de signes différens.

Pour que la première de ces conditions soit remplie, il faut que la distance C'C'' soit nulle, ce qui exige que les coordon-
Fig. 44. nées $x_{,}$ et $y_{,}$ du centre C' soient les mêmes que les coordonnées $x_{,,}$ et $y_{,,}$ du centre C''.

On aura par conséquent

$$x_{,} = x_{,,},\quad y_{,} = y_{,,}.$$

La seconde condition sera remplie si l'on a

$$R_{,} = -R_{,,} \ldots (44).$$

En multipliant les deux premières équations par la troisième, on trouvera

$$R_{,}x_{,} = -R_{,,}x_{,,} \ldots (45),$$
$$R_{,}y_{,} = -R_{,,}y_{,,} \ldots (46);$$

par la propriété des momens, nous aurons, en nommant P, P', P'', etc., les composantes de $R_{,}$, et P''', P^{IV}, etc., celles de $R_{,,}$,

$$R_{,}x_{,} = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$R_{,,}x_{,,} = P'''x''' + P^{IV}x^{IV} + P^{V}x^{V} + \text{etc.};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (45), on la réduira à

$$Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + P^{IV}x^{IV} + P^{V}x^{V} + \text{etc.} = 0 \ldots (47).$$

Par le même procédé, l'équation (46) nous donnera

$$Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + P^{IV}y^{IV} + P^{V}y^{V} + \text{etc.} = 0 \ldots (48).$$

Enfin si dans l'équation (44) on substitue les valeurs de $R_{,}$ et de $R_{,,}$, on obtiendra

$$P + P' + P'' + P''' + P^{IV} + P^{V} + \text{etc.} = 0 \ldots (49).$$

87. Lorsque les équations (47), (48) et (49) sont satisfaites, les forces parallèles sont en équilibre. Ces équations expriment donc les conditions suivantes : *Il y aura équilibre dans le système, si la somme des momens des forces, pris par rapport aux deux plans rectangulaires parallèles à la direction commune, est égale à zéro, et si en même temps la somme des forces est également nulle.*

88. Il y aurait encore équilibre, si la résultante des forces parallèles passait par un point fixe; car elle serait détruite par la résistance de ce point.

Des forces situées dans un plan, et appliquées à différens points liés entre eux d'une manière invariable.

89. Soient P, P', P'', P''', etc. (fig. 45) plusieurs forces qui agissent dans un plan que nous supposerons être celui des x, y, et qui sont appliquées aux points A, B, C, D, situés dans ce Fig. 45.

plan, et invariablement liés entre eux. Nous allons d'abord indiquer la construction qui est en usage pour obtenir leur résultante, lorsque ces forces peuvent se réduire à une seule. Pour cela, ayant pris les parties Aa, Bb, Cc, Dd, proportionnelles aux intensités de ces forces, on prolongera les droites Aa et Bb jusqu'à leur point de concours G, et ayant transporté en ce point les forces Aa et Bb, on construira le parallélogramme GG'; alors la diagonale GG' de ce parallélogramme représentera en intensité la résultante des forces Aa et Bb; on prolongera ensuite GG' et Cc jusqu'à leur point de concours H, et ayant transporté en ce point les forces GG' et Cc, on construira le parallélogramme HH' dont la diagonale HH' représentera la résultante des forces GG' et Cc, et par conséquent celle des forces Aa, Bb et Cc. On prolongera ensuite HH' jusqu'à sa rencontre en I avec la direction de Dd, et ayant construit le parallélogramme II', la diagonale II' sera la résultante de tout le système.

90. Si dans cette suite d'opérations il se trouvait des forces parallèles, en les combinant deux à deux, on déterminerait leur résultante par les articles (71), (72) et (74), et cette résultante serait égale à leur somme ou à leur différence.

Si ces forces parallèles étaient égales et non directement opposées, on en composerait une avec les autres forces du système, et l'on continuerait les opérations comme nous venons de le voir; mais si ces deux résultantes étaient celles de tout le système, on conclurait d'après l'art. 74, qu'il ne peut se réduire à une seule résultante.

91. Si dans cette construction, la dernière résultante était nulle, il est certain que l'équilibre subsisterait dans le système.

92. On peut remarquer que la construction précédente revient à transporter au point I les forces parallèlement à elles-mêmes, et à composer en ce point toutes ces forces en une seule.

En effet, en prenant seulement trois forces P, Q et S (fig. 46), Fig. 46.
la résultante DC des forces P et Q ayant été transportée en D'C',
on peut décomposer D'C' en D'P' et en D'Q', et l'on voit que
D'P' et D'Q' sont parallèles à DP et à DQ, en vertu de l'égalité
des parallélogrammes.

93. Cherchons maintenant les conditions analytiques de l'équilibre de ces forces. Pour cela, considérons d'abord trois forces P, P', P'', appliquées toujours à différens points fixes d'un système; une des conditions nécessaires pour que ces forces soient en équilibre, est qu'elles concourent en un point. En effet, si les forces P et P' (fig. 47) devaient être mises en Fig. 47.
équilibre par une troisième, il faudrait que cette force fût dans la direction de la résultante de P et de P', pour pouvoir détruire cette résultante. Or P et P' concourent en D; donc ce point D est sur leur résultante, et par conséquent sur celle de la troisième force; donc cette troisième force peut s'appliquer en D.

Si au contraire la troisième force ne pouvait pas s'appliquer au point de concours D des deux autres, cette force P'' (fig. 48) Fig. 48.
couperait la direction de la résultante DR de P et de P' en un point E, et alors les droites R et P'' feraient nécessairement entre elles un angle P''ER; donc ces forces P'' et R auraient une résultante; d'où il suit qu'elles ne pourraient être en équilibre.

94. Lorsque les forces P, P', P'' concourent en un point A, on le pourra prendre pour point d'application de ces forces, en les transportant en ce point parallèlement à leurs directions, art. 92; alors les conditions d'équilibre seront les mêmes que celles des forces appliquées à un point.

Ces conditions seront qu'on ait

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0,$$
$$P\cos6 + P'\cos6' + P''\cos6'' = 0.$$

A ces équations, il faut joindre celle que nous allons déterminer pour la condition du concours des forces.

95. Soient donc P, P′ et R trois forces qui concourent en A
Fig. 49. (fig. 49). Si par un point C, pris arbitrairement, on mène en A une droite CA, et que de ce point C on abaisse des perpendiculaires CI, CI′, CI″, les triangles rectangles CAI, CAI′, CAI″ auront une même hypothénuse; c'est cette hypothénuse commune à ces triangles, qui constitue la condition du concours; car elle n'appartient à la fois aux trois triangles, que parce qu'ils ont le même sommet A.

Par ce point A menons une perpendiculaire AB à la droite CA; et des extrémités des droites AP, AP′, AR qui représentent les intensités des forces, abaissons les perpendiculaires PD, P′D′, RD″ sur AB; les triangles rectangles ACI, APD seront semblables, parce que les angles formés par AP avec les parallèles AC et PD, sont égaux, comme alternes, internes; nous aurons donc la proportion

$$AC : CI :: AP : AD;$$

et si nous faisons $AC = c$, $CI = p$, cette proportion deviendra

$$c : p :: P : AD;$$

d'où nous tirerons

$$AD = \frac{Pp}{c}:$$

en nommant de même p' et r les perpendiculaires CI′ et CI″, nous trouverons

$$AD' = \frac{P'p'}{c}, \quad AD'' = \frac{Rr}{c}.$$

Cela posé, si R est la résultante de P et de P′, la composante de R suivant la droite AB, sera égale à la somme des

composantes de AP et de AP″, suivant cette droite (*); par conséquent on aura

$$AD'' = AD + AD'.$$

Mettant dans cette équation les valeurs que nous venons de trouver, elle devient

$$\frac{Rr}{c} = \frac{Pp}{c} + \frac{P'p'}{c};$$

et en supprimant le diviseur commun, on la réduit à

$$Rr = Pp + P'p' \ldots \quad (50).$$

96. Si le point C était situé dans l'angle des forces P et P′, ou dans son opposé au sommet, le moment de la résultante R serait égal à la différence des momens des composantes; de sorte que l'on aurait

$$Rr = Pp - P'p' \ldots \quad (51)\ (^{**}).$$

(*) C'est ce qu'il est facile de démontrer en construisant le parallélogramme APRP′ (fig. 50), et en menant P′E parallèlement à AB; les triangles P′ER, ADP sont égaux et donnent Fig. 50.

$$AD = P'E = D'D''.$$

Mettant donc D′D″ à la place de AD dans l'équation identique

$$AD'' = AD' + D'D'',$$

on a

$$AD'' = AD' + AD.$$

(**) Dans le cas où le point C est situé dans l'angle des forces, les triangles PAD et P′ER (fig. 51) étant égaux, on a Fig. 51

$$AD = P'E = D'D'';$$

par conséquent on peut changer l'équation identique

$$AD'' = AD' - D'D'',$$

en celle-ci

$$AD'' = AD' - AD.$$

97. Nous avons vu (art. 79), que le moment d'une force par rapport à un plan, était le produit de l'intensité de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'applica-
Fig. 52. tion sur ce plan. Par analogie, nous appellerons *moment d'une force* par rapport à un point, la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de cette force. Les équations (50) et (51) nous apprennent donc que le moment de la résultante de deux forces, est égal à la somme ou à la différence des momens des composantes, suivant que le point C qu'on nomme *le centre des momens*, est situé hors des angles opposés au sommet PAP', LAL' (fig. 52), formés par les directions des composantes, ou se trouve dans l'un ces angles opposés au sommet.

98. On peut comprendre ces deux cas dans un seul, en disant que le moment de la résultante de deux forces est égal à la somme des momens de leurs composantes : alors le mot *somme* est pris dans un sens plus général, et comprend l'assemblage de plusieurs termes, sans avoir égard aux signes qui les affectent.

99. La condition du concours des forces vient de nous conduire à la théorie des momens; il ne nous reste plus que d'en déduire la troisième équation d'équilibre.

Pour cet effet, nous remarquerons préliminairement que
Fig. 53. lorsque deux forces égales P et P' (fig. 53) sont tenues en équilibre par une troisième P'', cette force P'' doit être égale à la résultante R des deux autres forces, et d'un signe contraire. Cela posé, si nous abaissons une perpendiculaire p'' sur la direction de P'' qui est aussi celle de R, nous aurons par le principe des momens,

$$Rp'' = Pp + P'p',$$

et en remplaçant R par $-$ P'', cette équation deviendra

$$Pp + P'p' + P''p'' = 0.$$

Ainsi les équations d'équilibre de trois forces situées dans un plan, et appliquées à différens points A, B, D, sont

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0 \ldots (52),$$
$$P\cos 6 + P'\cos 6' + P''\cos 6'' = 0 \ldots (53),$$
$$Pp + P'p' + P''p'' = 0 \ldots (54).$$

100. Pour passer au cas où plus de trois forces sont en équilibre, regardons P comme la résultante de deux forces P''' et P^{IV}, nous aurons

$$Pp = P'''p''' + P^{\text{IV}}p^{\text{IV}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (54) nous la changerons en

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} = 0.$$

Par une semblable opération, les équations (52) et (53) deviendront

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + P^{\text{IV}}\cos\alpha^{\text{IV}} = 0,$$
$$P'\cos 6' + P''\cos 6'' + P'''\cos 6''' + P^{\text{IV}}\cos 6^{\text{IV}} = 0.$$

101. Ce procédé pouvant s'étendre à un plus grand nombre de forces, nous aurons pour les équations générales de l'équilibre des forces appliquées à différens points et situées dans un plan,

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0 \ldots (55),$$
$$P\cos 6 + P'\cos 6' + P''\cos 6'' + \text{etc.} = 0 \ldots (56),$$
$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0 \ldots (57).$$

102. On emploie quelquefois une notation commode pour exprimer ces équations, en les écrivant de la manière suivante :

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0, \quad \Sigma(P\cos 6) = 0, \quad \Sigma(Pp) = 0.$$

Par le caractère grec Σ, on entend une somme de quantités de la forme de celle qui est comprise entre les parenthèses (*Note quatrième*).

103. Le procédé qui nous a servi à trouver l'équation (50), nous fournit les moyens de démontrer une règle facile pour reconnaître les signes qui doivent affecter les différens momens des forces. En effet, si l'on suppose que le centre
Fig. 54. fixe C des momens (fig. 54), soit situé hors de l'angle des forces extrêmes ou de son opposé au sommet, et que ces forces P, P', P'', etc., agissent par pulsions, et restent invariablement liées aux perpendiculaires p, p', p'', p''', etc., ces forces feront tourner p, p', p'', etc., dans le même sens autour
Fig. 55. du point C; si au contraire le centre C (fig. 55) est dans l'angle des forces extrêmes ou dans son opposé au sommet, les forces P, P', P'', etc., situées du même côté de C, feront mouvoir p, p', p'', etc., dans le même sens autour du point C, tandis que les forces P''', P^{IV}, etc., feront tourner p''', p^{IV}, etc., en sens contraire autour du même point. Or les expressions $\frac{Pp}{c}$, $\frac{P'p'}{c}$, etc., représentées par AD, AD', etc., étant de signes différens que AD''', AD^{IV}, etc., il en résulte que les forces qui ont des momens de mêmes signes, tendront à faire tourner le système dans un sens; tandis que les forces qui ont des momens de signes contraires, tendront à le faire tourner en sens contraire.

104. Dans le cas où les forces ne sont pas en équilibre, le moment de la résultante sera égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le système dans le même sens que cette résultante, moins la somme des momens qui tendent à faire tourner le système en sens contraire.

105. D'après ce qui précède, l'équation $\Sigma(Pp) = 0$ nous dit que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens, est égale à celle des momens des forces qui tendent à le faire tourner dans un sens contraire.

106. Si dans le système supposé en équilibre, on supprime

l'une des forces (par exemple P), les autres forces auront une résultante; cette résultante devant agir en sens opposé de P qui tenait les autres forces en équilibre, au lieu des équations (55), (56) et (57), nous aurons celles-ci :

$$\begin{aligned} R\cos a &= P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.},\\ R\cos b &= P'\cos 6' + P''\cos 6'' + P'''\cos 6''' + \text{etc.},\\ Rr &= P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} R\cos a &= \Sigma(P\cos\alpha) = X,\\ R\cos b &= \Sigma(P\cos 6) = Y,\\ Rr &= \Sigma(Pp). \end{aligned}$$

107. Au moyen de ces équations, on pourra obtenir tout ce qui est relatif à la résultante.

Car pour déterminer son intensité, les deux premières donneront

$$R^2(\cos\alpha^2 + \cos 6^2) = X^2 + Y^2,$$

et parce que la somme des carrés des cosinus est égale à l'unité, nous aurons

$$R^2 = X^2 + Y^2.$$

Les mêmes équations feront connaître l'inclinaison de la résultante à l'égard des axes; car ces équations nous donneront

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}.$$

108. Pour placer la résultante dans le système, on commencera par déterminer la position d'une droite AB qui passerait par l'origine et serait parallèle à la résultante. Pour cet effet, le signe de $\cos b$ fera d'abord connaître si AB doit être situé au-dessus ou au-dessous de l'axe des x; car lorsque $\cos b$ est positif, la droite AB devant faire un angle aigu avec l'axe des y, ne peut prendre que l'une des positions indiquées dans la figure 56. Au lieu que lorsque $\cos b$ est négatif, la droite AB Fig. 56.



doit se trouver dans l'une des positions marquées dans la
Fig. 57. figure 57. Ainsi quel que soit le signe de $\cos b$, la droite AB est susceptible de prendre deux positions différentes à l'égard de l'axe des y : dans l'une elle fera un angle aigu avec l'axe des x, et dans l'autre elle fera avec cet axe un angle obtus. Le signe de $\cos a$ déterminera ensuite celle de ces deux positions qui convient au problème ; car si $\cos a$ est positif, l'angle formé par la droite AB avec l'axe des x, sera aigu, tandis que cet angle se trouvera obtus si $\cos a$ est négatif.

Ayant ainsi fixé la position de la droite AB, on lui mènera par l'origine A une perpendiculaire égale à $r = \frac{\Sigma Pp}{R}$. Cette
Fig. 58. perpendiculaire sera représentée (fig. 58) par AO ou par AO', suivant le signe de r, et la parallèle OR ou O'R', à la droite AB, indiquera la direction de la résultante.

109. Pour obtenir l'équation de la résultante, nous observerons que dans le cas le plus général, la résultante coupant
Fig. 59. l'axe des y en un certain point B (fig. 59), son équation doit être de cette forme

Fig. 59. $$y = x \operatorname{tang} D + AB \ldots \quad (58).$$

Comme l'angle que fait la direction de la résultante avec l'axe des x est représenté par a, nous avons $D = a$, et par conséquent,

$$\operatorname{tang} D = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos b}{\cos a} = \frac{R \cos b}{R \cos a} = \frac{Y}{X}.$$

A l'égard de AB, sa valeur est donnée par l'équation

$$OA = AB \cos OAB.$$

L'angle OAB qui entre dans cette équation est égal à D, puisque ces angles sont l'un et l'autre complémens de OAD. Nous pourrons donc remplacer OAB par D, ou plutôt par a ; et comme OA n'est autre chose que la perpendiculaire qui a été abaissée du centre des momens sur la direction de la ré-

sultante et que nous avons représentée par r, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous trouverons

$$r = \mathrm{AB} \cos a,$$

et par conséquent,

$$\mathrm{AB} = \frac{r}{\cos a}.$$

Mettant cette valeur de AB et celle de tang D dans l'équation (58), nous obtiendrons

$$y = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} x + \frac{r}{\cos a} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} x + \frac{\mathrm{R}r}{\mathrm{R} \cos a} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} x + \frac{\mathrm{R}r}{\mathrm{X}}.$$

Faisant évanouir le diviseur commun X, et réunissant les termes en x et en y dans le premier membre, on trouvera

$$y\mathrm{X} - x\mathrm{Y} = \mathrm{R}r,$$

ou en remplaçant Rr par sa valeur $\Sigma \mathrm{P}p$, on aura pour l'équation de la résultante,

$$y\mathrm{X} - x\mathrm{Y} = \Sigma \mathrm{P}p.$$

110. Dans le cas de l'équilibre, X et Y sont nuls, et cette équation se réduit à $\Sigma \mathrm{P}p = 0$, résultat qui s'accorde avec ce qui précède.

111. Les données qui suffisent pour pouvoir déterminer la direction de la résultante étant, 1° les intensités des forces; 2° les angles desquels dépendent leurs directions; 3° les coordonnées de leurs points d'application, il conviendrait de pouvoir substituer à l'équation (57), une autre dans laquelle, au lieu des expressions p, p', p'', etc., on fît entrer les coordonnées des points d'application des forces. Pour parvenir à ce but, plaçons l'origine en A (fig. 60); et soient x et y les coordonnées du point d'application M d'une force représentée en intensité par la droite MP, les composantes de M parallèle- Fig. 60.

ment aux axes Ax et Ay, seront

$$MN = P \cos \alpha,$$
$$MQ = P \cos \beta.$$

Abaissons de l'origine A les perpendiculaires AO, AF et AE sur les directions prolongées de MP et de ses composantes, nous trouverons

$OA \times MP =$ moment de la résultante P,
$AF \times MN =$ moment de la composante $P \cos \alpha$,
$AE \times MQ =$ moment de la composante $P \cos \beta$;

or, en regardant les forces comme agissant par pulsion, la résultante R et la composante $P \cos \alpha$ tendront à faire tourner AO et AF autour du point A dans le même sens. Nous affecterons donc du signe positif les momens de ces forces, et nous donnerons le signe négatif au moment de la force $P \cos \beta$, qui tend à faire tourner AE en sens contraire autour du point A. Ainsi nous aurons l'équation

$$Pp = yP \cos \alpha - xP \cos \beta \text{ (*)}.$$

Par la même raison,

(*) Voici de quelle manière on pourrait démontrer directement cette équation.

Les angles α et β étant ceux que la droite MD (fig. 59) forme avec les directions des axes coordonnés, ces angles sont complémens l'un de l'autre; et comme nous avons vu que l'angle CEM était égal à α, il faudra que son complément CED soit égal à β. Cela posé, nous avons

$$AO = EC - FE,$$

ou

$$p = ME \cos CEM - AE \cos FEA;$$

Substituant à la place de toutes ces quantités leurs valeurs analytiques, nous trouverons

$$p = y \cos \alpha - x \cos \beta.$$

$$P'p' = y'P' \cos \alpha' - x'P' \cos \beta',$$
$$P''p'' = y''P'' \cos \alpha'' - x''P'' \cos \beta'',$$
$$P'''p''' = y'''P''' \cos \alpha''' - x'''P''' \cos \beta''',$$
etc. etc. etc.;

en substituant ces valeurs dans l'équation des momens, elle deviendra

$$P(y \cos \alpha - x \cos \beta) + P'(y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') + \text{etc.} = 0 \ldots (59);$$

par conséquent nous aurons pour celle de la résultante,

$$yX - xY = \Sigma [P(y \cos \alpha - x \cos \beta)].$$

112. Nous avons vu que pour déterminer les signes des momens Pp, $P'p'$, etc., qui entrent dans l'équation (57), il fallait faire usage de la règle de l'article 107, qui est un peu étrangère aux considérations analytiques; mais lorsque par une transformation cette équation sera devenue celle que nous avons indiquée par (59), il suffira pour déterminer les signes des momens, de faire usage de la règle des signes (art. 37 et 38), en ayant seulement le soin de changer aussi les signes des coordonnées, lorsque de positives elles deviennent négatives.

Par exemple, soit une force P située à l'égard des axes coordonnés Ax et Ay, comme nous l'avons placée (fig. 61). Fig. 61.
Le moment de cette force étant en général $P(y \cos \alpha - x \cos \beta)$, pour le modifier convenablement à ce cas particulier, nous avons x *négatif*, y *positif*, cos α *négatif*, cos β *négatif*; donc le moment de cette force, en ayant égard aux signes, deviendra

$$P(-y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

113. Remarquons qu'il y a toujours une hypothèse primitive faite tacitement sur les signes. Cette hypothèse est ici, qu'une force dont la direction CD (fig. 60) coupe l'axe des y, a son moment Pp positif.

114. Les équations d'équilibre (52), (53) et (54) expriment la condition que toutes les forces du système se réduisent à deux forces égales et directement opposées. En effet, si nous appelons $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, etc., les composantes parallèles à l'axe des x qui agissent dans un sens, et $P''\cos\alpha''$, $P'''\cos\alpha'''$, etc., celles qui agissent dans un sens opposé, l'équation (52) reviendra à celle-ci :

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \text{etc.} = P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.}$$

Les forces $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, etc., étant parallèles, nous pouvons, par la composition des forces, les réduire à une seule X' égale à leur somme et parallèle à leur direction. Opérant de même à l'égard des forces $P''\cos\alpha''$, $P'''\cos\alpha'''$, etc., et appelant X'' leur résultante, le système de toutes les forces parallèles à l'axe des x se réduira à celui de deux forces X' et X'' égales et dirigées en sens contraires.

Par une même construction, nous convertirons toutes les forces parallèles à l'axe des y, à deux résultantes Y' et Y'' égales et dirigées en sens contraires.

Transportons les forces X' et Y' à leur point de rencontre
Fig. 62. M (fig. 62); et les forces X'' et Y'' à leur point de rencontre N, nous pourrons construire les rectangles MA et NB, dans lesquels les côtés MC, MD, NE, NF représenteront les forces X', Y', X'', Y''; et comme les côtés homologues de ces rectangles sont égaux, il en sera de même des diagonales MA et NB dont les directions se trouveront parallèles, en vertu de l'égalité des triangles AMD, BNE.

Les équations $X = 0$, $Y = 0$ expriment donc cette condition, que les forces situées dans un plan peuvent se réduire à deux forces MA et NB, égales, parallèles et dirigées en sens contraires; mais ces équations ne disent pas que les forces MA et NB agissent dans la même direction. Pour que cela ait lieu, il faut que l'équation $\Sigma Pp = 0$ soit satisfaite : en effet, nommons R' et R'' les forces MA et NB, et r' et r'' les perpendicu-

laires OP et OQ abaissées d'un point O pris hors des directions prolongées de ces forces; comme R′ et R″ agissent en sens contraires, les momens de ces forces seront de différens signes, et l'équation $\Sigma Pp = 0$ sera remplacée par celle-ci,

$$R'r' - R''r'' = 0.$$

Par hypothèse, R′ et R″ ont les mêmes intensités; ainsi en supprimant R′ et R″ comme des facteurs égaux dans l'équation précédente, nous la réduirons à

$$r' - r'' = 0;$$

par conséquent, la différence des droites $OP = r'$ et $OQ = r''$ étant nulle, il s'ensuit que les points P et Q coïncident, et que les forces MA et NB sont dirigées suivant une même droite.

Une conséquence de ce qui précède, est que lorsque l'équation $\Sigma Pp = 0$ n'est pas satisfaite, et qu'on a seulement $X = 0$ et $Y = 0$, le système se réduit à deux forces parallèles MA et NB, du genre de celles que nous avons considérées (art. 74).

115. Si au contraire l'équation $\Sigma Pp = 0$ était la seule qui fût satisfaite, il n'y aurait pas équilibre dans le système; car alors les quantités X et Y n'étant pas nulles, il en serait de même de R, qui est donnée par l'équation Fig. 62.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Dans ce cas, l'équation $\Sigma Pp = 0$, ou plutôt $Rr = 0$, ne pourrait être satisfaite qu'en faisant $r = 0$, puisque nous venons de voir que R ne pourrait être nulle; or r étant une perpendiculaire abaissée du centre des momens sur la résultante, il suit de là que le centre des momens serait sur la résultante.

116. Ainsi lorsque, des trois équations $\Sigma P \cos \alpha = 0$, $\Sigma P \cos \beta = 0$, $\Sigma Pp = 0$, la dernière seule sera satisfaite, il faudra, pour établir l'équilibre dans le système, qu'il y ait un point fixe sur la résultante; par exemple, si les forces

P, P', P'', P''', etc., sont appliquées à différens points d'un levier, et que le point C par lequel passe la résultante soit un obstacle invincible qui détruise l'effet de cette résultante, la seule condition $\Sigma Pp = 0$ suffira pour mettre le système en équilibre. Nous verrons par la suite que l'intensité de cette résultante serait la pression exercée sur le point C.

117. Lorsque le système se réduit à deux forces parallèles égales et non directement opposées, il suffit d'ajouter une force arbitraire S, pour qu'il soit susceptible d'avoir une résultante. En effet, il peut arriver les deux cas suivans : ou
Fig. 63. la nouvelle force S sera parallèle à P et à Q (fig. 63), ou elle ne le sera pas; dans le premier cas, on décomposera S en deux forces P' et Q', qui passeront par les points A et B (art. 73); alors le système des trois forces P, Q et S sera remplacé par celui des deux forces inégales $P + P'$ et $Q - Q'$, et par conséquent aura une résultante.

Fig. 64. Si la nouvelle force S (fig. 64) n'était pas parallèle aux deux autres, on la prolongerait jusqu'à sa rencontre A' avec la direction de l'une de ces forces. Transportant les points d'application de ces deux forces en A', on construirait leur parallélogramme, et l'on déterminerait la résultante R qui rencontrerait la direction de la troisième force, et par conséquent pourrait se composer avec elle.

Des forces qui agissent d'une manière quelconque dans l'espace.

118. Soient P', P'', P''', etc., etc., diverses forces situées dans l'espace,

x', y', z' les coordonnées du point d'application de P',
x'', y'', z'' les coordonnées du point d'application de P'',
x''', y''', z''' les coordonnées du point d'application de P''',
etc. etc. etc.

α', β', γ', les angles formés par P′ avec les axes,
α'', β'', γ'', les angles formés par P″ avec les axes,
α''', β''', γ''', les angles formés par P‴ avec les axes,
etc. etc. etc.

Nous allons chercher les conditions d'équilibre de ces forces, et tâcher de faire dépendre ces conditions de celles que nous avons exposées dans les théories précédentes. En conséquence, examinons si nous ne pouvons pas décomposer toutes les forces en deux groupes, les unes parallèles, et les autres situées dans un même plan. Comme nous pouvons disposer des axes coordonnés de la manière la plus convenable au problème, nous tâcherons de décomposer une partie des forces dans le plan des x, y, et de faire en sorte que toutes les composantes qui ne peuvent pas être comprises dans ce plan, soient parallèles à l'axe des z.

119. Si parmi les forces du système il ne s'en trouvait aucune qui fût parallèle au plan des x, y, il serait bien facile d'obtenir la décomposition proposée; car soit P′ l'une de ces forces, que nous supposerons appliquée au point M′ (fig. 65), Fig. 65. on prolongera sa direction jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan des x, y en un point C′, et transportant en C′ le point d'application de cette force, on la décomposera en deux autres, l'une C′L parallèle à l'axe des z, et l'autre C′N située dans le plan des x, y.

120. Mais lorsque la force P′ est parallèle au plan des x, y, une pareille décomposition ne peut s'effectuer. Ainsi nous allons chercher un autre mode de décomposition qui ne présente pas cet inconvénient.

Pour cet effet, menons par le point M′ (fig. 66) une parallèle à l'axe des z, et prenons sur cette parallèle des parties égales M′O, M′O′; ces droites M′O et M′O′ pourront représenter deux forces g' et $-g'$ égales et directement opposées. Fig. 66. L'introduction de ces deux forces $+g'$ et $-g'$ ne troublera

pas l'équilibre, puisqu'elles se détruisent mutuellement; et alors, au lieu de la force P′, on aura les trois forces P′, g' et $-g'$. On peut composer P′ avec $-g'$, et en nommant R′ la résultante de ces deux forces, la force P′ sera remplacée par le système des deux forces R′ et g', l'une et l'autre appliquées en M′; la force g', représentée par M′O, restera parallèle à l'axe des z, et la force R′ aura la faculté de pouvoir, dans tous les cas, rencontrer le plan des x, y, parce que la composante $-g'$ qu'elle renferme, et qu'on peut prendre arbitrairement, est parallèle à l'axe des z.

121. Nous entrevoyons déjà que puisque des deux forces g' et R′, l'une est parallèle à l'axe z, il ne s'agirait plus, pour parvenir à notre but, que de transporter le point d'application de la force R′ au point C′, où elle perce le plan des x, y; car alors on pourrait encore, comme dans l'article 119, décomposer R′ à ce point, en deux forces, l'une située dans le plan des x, y, et l'autre parallèle à l'axe des z. De sorte qu'au lieu de la force P′, nous aurions trois forces : la première appliquée en C′, et située dans le plan des x, y, et les deux autres parallèles à l'axe des z, l'une appliquée en C′, et l'autre en M′.

122. Les coordonnées des points d'application des forces devenant nécessaires lorsqu'on veut exprimer les conditions analytiques de leur équilibre, cherchons maintenant à déterminer les coordonnées du point C′.

C'est à quoi l'on parviendra facilement au moyen des équations de la résultante R′ qui passe par le point x', y', z'. Pour les obtenir, nous remarquerons que les équations d'une droite quelconque R′ assujétie à passer par un point x', y', z', sont (art. 57).

$$\left.\begin{aligned} z - z' &= \frac{Z}{X}(x - x') \\ z - z' &= \frac{Z}{Y}(y - y') \end{aligned}\right\} \dots (60)$$

Dans ces équations, X, Y et Z représentent les projections de la droite R′ sur les axes cordonnés. Ces projections étant égales aux composantes de R′ parallèlement aux axes, il ne s'agira plus que de remplacer X, Y et Z par ces composantes. Or R′ étant la résultante de P′ et de $-g'$, on peut substituer à P′ ses trois composantes $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$; et R′ sera la résultante des quatre forces

$$P' \cos \alpha', \quad P' \cos \beta', \quad P' \cos \gamma', \quad -g'.$$

Ces forces agissant parallèlement aux axes coordonnés, nous aurons

$$X = P' \cos \alpha', \quad Y = P' \cos \beta', \quad Z = P' \cos \gamma' - g' \text{ (*)},$$

et en mettant ces valeurs dans les équations (60), on obtiendra pour les équations de R′,

$$\left.\begin{aligned} z - z' &= \frac{P' \cos \gamma' - g'}{P' \cos \alpha'}(x - x') \\ z - z' &= \frac{P' \cos \gamma' - g'}{P' \cos \beta'}(y - y') \end{aligned}\right\} \dots (61)$$

123. Pour avoir les coordonnées du point C′ (fig. 66) où la droite R′ perce le plan des x, y, nous remarquerons qu'en ce point $z = 0$; et si nous appelons $a_{,}$ et $b_{,}$ les deux autres coordonnées, il faudra supposer dans les équations (61), Fig. 66.

$$x = a_{,}, \quad y = b_{,}, \quad z = 0,$$

(*) On ne peut dans aucun cas supposer que Z soit nul, parce que g' étant arbitraire, on le supposera toujours différent de $P' \cos \gamma'$.

et elles se réduiront à

$$-z' = \frac{P'\cos\gamma' - g'}{P'\cos\alpha'}(a_{,} - x'),$$

$$-z' = \frac{P'\cos\gamma' - g'}{P'\cos\beta'}(b_{,} - y'),$$

d'où l'on tirera

$$a_{,} = x' - \frac{z'P'\cos\alpha'}{P'\cos\gamma' - g'},$$

$$b_{,} = y' - \frac{z'P'\cos\beta'}{P'\cos\gamma' - g'}\ (*);$$

telles sont les coordonnées $a_{,}$ et $b_{,}$ du point C', où la résultante R' coupe le plan des x, y.

(*) Voici comment on pourrait démontrer géométriquement ces équations : soit MN (fig. 67) la résultante R' appliquée en M ; les composantes rectangulaires de cette force seront

Fig. 67.

$$MF = P'\cos\alpha',\quad ME = P'\cos\beta',\quad MO = P'\cos\gamma' - g'.$$

Par le point C où R' rencontre le plan des x, y, menons la parallèle CB à l'axe des x, les coordonnées du point C seront évidemment

$$AQ = AP - PQ,\quad QC = PD - BD,$$

ou

$$AQ = x' - CB,\quad QC = y' - BD.$$

Il ne s'agit plus que de déterminer CB et BD. Pour cela, nommons θ l'angle que la diagonale ON fait avec la direction OL ; les droites ON et CD sont parallèles, puisqu'elles se trouvent situées dans des plans horizontaux qui sont parallèles ; d'où il suit que les angles NOL, DCB sont égaux comme formés par des côtés parallèles ; ainsi nous aurons

$$DCB = \theta;$$

par conséquent

$$CB = CD\cos\theta,\quad DB = CD\sin\theta \ldots\ (62)$$

Cela posé, les triangles CMD, OMN rectangles, l'un en D et l'autre en O, nous donnent la proportion

$$MO : ON :: MD : CD,$$

124. La force R' (fig. 68) étant représentée par la partie M'R' de sa direction, on peut la transporter au point C' en prenant C'D' = M'R'. Décomposant alors C'D' en trois forces rectangulaires appliquées en C', ces forces seront les mêmes que les composantes de M'R'; par conséquent nous pourrons considérer le point C' comme sollicité par trois forces $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \mathcal{C}'$ et $P' \cos \gamma' - g'$. Les deux premières seront situées dans le plan des x, y, et la troisième sortira de ce plan et agira parallèlement à l'axe des z: ainsi, au lieu de la force P' appliquée en M', nous aurons Fig. 68.

en M' la force g' . . . . parallèle à l'axe des z,
en C' la force $P' \cos \gamma' - g'$ parallèle à l'axe des z,
en C' la force $P' \cos \alpha'$ . . . . située dans le plan des x, y,
en C' la force $P' \cos \mathcal{C}'$ . . . . située dans le plan des x, y.

125. En opérant de même à l'égard des forces P'', P''', P^{IV}, etc., au moyen des forces $g'' - g''$, $g''' - g'''$, $g^{\text{IV}} - g^{\text{IV}}$, etc., qu'on ajoutera à leurs points d'application M'', M''', M^{IV}, etc., on décomposera le système en deux groupes de forces, les

---

ou

$$P' \cos \gamma' - g' : ON :: z : CD;$$

donc

$$CD = \frac{z . ON}{P' \cos \gamma' - g'};$$

mettant cette valeur dans les équations (62), on obtient

$$CB = \frac{z . ON \cos \theta}{P' \cos \gamma' - g'}, \quad DB = \frac{z . ON \sin \theta}{P' \cos \gamma' - g'};$$

remplaçant ON cos θ et ON sin θ par leurs valeurs OL et NL, et observant que OL et NL ne sont autre chose que les composantes $P' \cos \alpha'$ et $P' \cos \mathcal{C}'$ de MN, nous aurons

$$CB = \frac{z . P' \cos \alpha'}{P' \cos \gamma' - g'}, \quad DB = \frac{z . P' \cos \mathcal{C}'}{P' \cos \gamma' - g'},$$

valeurs qu'on substituera dans celles de AQ et de OC.

unes parallèles à l'axe des z, et les autres situées dans le plan des x, y.

Les forces parallèles à l'axe des z seront

$$g', \ g'', \ g''', \ \text{etc.},$$

appliquées aux points M', M'', M''', etc.;

$$P' \cos \gamma' - g', \quad P'' \cos \gamma'' - g'', \ \text{etc.},$$

appliquées aux points C', C'', C''', etc.

Et les forces situées dans le plan des x, y, seront

$$P' \cos \alpha', \quad P'' \cos \alpha'', \quad P''' \cos \alpha''', \quad P^{\text{iv}} \cos \gamma^{\text{iv}} - g^{\text{iv}}, \ \text{etc.},$$

appliquées en C', C'', C''', etc.,

$$P' \cos 6', \quad P'' \cos 6'', \quad P''' \cos 6''', \ \text{etc.},$$

appliquées en C', C'', C''', etc.

126. On va démontrer que pour qu'il y ait équilibre entre ces forces, il faut, 1° que les forces situées dans le plan des x, y se fassent équilibre; 2° qu'il en soit de même à l'égard des forces parallèles.

Pour cela, les points C', C'', C''', etc., considérés comme les points d'application d'une partie des forces du système, sont invariablement liés entre eux. On peut donc imaginer que par deux de ces points, on ait mené une droite C'C'' qu'on prolongera indéfiniment de chaque côté; si l'équilibre général subsiste, cette droite sera immobile; par conséquent aucun des points qui la composent ne pourra se mouvoir : or cela suffit pour expliquer la destruction mutuelle des forces situées dans le plan des x, y.

En effet, toute force située dans le plan des x, y rencontrera la droite fixe ou lui sera parallèle. Dans le premier cas,
Fig. 69. nous représenterons cette force par AB (fig. 69), et nous la prolongerons jusqu'à sa rencontre O de la droite fixe; et

comme il suffit qu'une force ait un point fixe dans sa direction pour qu'elle soit détruite, ce point O rendra nul l'effet de la force AB.

D'une autre part, si une force DE était parallèle à C'C'', elle ne pourrait se mouvoir sans entraîner C'C'' dans le même sens, ce qui est impossible, puisque la droite C'C'' est fixe; par conséquent la force DE sera aussi sans effet (*).

Les forces qui sont dans le plan des x, y étant en équilibre, il faut que les forces verticales le soient aussi; car autrement l'équilibre général n'aurait pas lieu.

127. Le problème est ainsi réduit à trouver les conditions d'équilibre, 1° des forces parallèles à l'axe des z; 2° des forces situées dans le plan des x, y.

Conditions d'équilibre des forces parallèles à l'axe des z.

128. Ces conditions étant les mêmes que celles que nous avons prescrites, article 87, elles exigent qu'on égale à zéro,

1°. La somme des forces parallèles à l'axe des z;

2°. La somme des momens par rapport au plan des y, z;

3°. La somme des momens par rapport au plan des x, z.

La première de ces conditions nous donne

$$P'\cos\gamma' - g' + g' + P''\cos\gamma'' - g'' + g'' + P'''\cos\gamma''' - g''' + g''' + \text{etc.} = 0;$$

(*) On pourrait le démontrer plus rigoureusement de la manière suivante. Soit MP (*fig.* 70) une force parallèle à la droite fixe AB; menons au point d'application M de cette force, deux droites MN et MN' égales et directement opposées. Nous ne changerons rien à l'état du système, puisque MN et MN' se détruisent. Or en composant MP avec MN', on a la résultante MS qui est détruite par le point O situé sur sa direction. La force MN est aussi détruite par la résistance du point L; donc le système des forces MN, MN' et MP n'ayant aucun effet, il en sera de même de MP.

ou, en réduisant,

$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.} = 0 \;.\;.\; (63).$$

Pour remplir la seconde condition, nous avons deux sortes de momens à prendre:

1°. ceux des forces g', g'', etc., appliquées aux points M', M'', etc.;

2°. ceux des forces $P' \cos \gamma' - g'$, $P'' \cos \gamma'' - g''$, etc., appliquées au points C', C'', etc.

Fig. 71. En considérant d'abord la première force g' qui agit au point M' (fig. 71), le moment de cette force par rapport au plan des y, z, est $g' \times M'N'$; or $M'N' = B'D' = AG' = x'$; donc le moment cherché est $g'x'$.

A l'égard du moment de la force $P' \cos \gamma' - g'$ qui agit en C', ce moment pris par rapport au même plan des y, z, est évidemment égal à $(P' \cos \gamma' - g') \times E'C'$, ou plutôt à $(P' \cos \gamma' - g')\, a_{,}$; donc la somme des momens des forces g' et $P' \cos \gamma' - g'$ par rapport au plan des y, z, est représentée par

$$g'x' + (P' \cos \gamma' - g')\, a_{,}.$$

Mettant dans cette expression la valeur de $a_{,}$ trouvée article 123, on aura

$$g'x' + (P' \cos \gamma' - g')\left(x' - \frac{z'P' \cos \alpha'}{P' \cos \gamma' - g'}\right);$$

effectuant la multiplication indiquée et réduisant, on trouve

$$x'P' \cos \gamma' - z'P' \cos \alpha'.$$

Prenant, par le même procédé, les momens des forces parallèles appliquées aux points M'', M''', etc., C'', C''', etc., et réunissant tous ces momens, leur somme sera exprimée par l'équation

$$P'(x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + P''(x'' \cos \gamma'' - z'' \cos \alpha'') + \text{etc.} = 0 \;.\;.\; (64).$$

Pour obtenir la troisième équation d'équilibre des forces parallèles, le moment de la force g' appliquée en M', par rapport au plan des x, z, sera $g' \times M'L' = g' \times B'G' = g'y'$; celui de la force $P' \cos \gamma' - g'$ appliquée en C', sera $(P' \cos \gamma' - g') b_{,}$; ainsi l'on aura pour la somme de ces deux momens Fig. 71.

$$g'y' + (P' \cos \gamma' - g') b_{,}.$$

Mettant pour $b_{,}$ sa valeur, art. 123, et réduisant, on trouvera

$$y'P' \cos \gamma' - z'P' \cos \mathcal{C}'.$$

Déterminant de même les momens des autres forces parallèles par rapport au plan des x, z, on aura pour la troisième équation de condition,

$$\begin{aligned} &P'(y' \cos \gamma' - z' \cos \mathcal{C}') \\ &+ P''(y'' \cos \gamma'' - z'' \cos \mathcal{C}'') + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (65). \end{aligned}$$

Conditions d'équilibre des forces situées dans le plan des x, y.

129. Ces conditions étant les mêmes que celles des forces qui agissent dans un plan, il faut,

1°. Que la somme des forces parallèles à l'axe des x soit égale à zéro;

2°. Que la somme des forces parallèles à l'axe des y soit égale à zéro;

3°. Que la somme des momens des forces par rapport à l'origine soit égale à zéro.

Les deux premières de ces conditions donnent lieu aux équations

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (66),$$
$$P' \cos \mathcal{C}' + P'' \cos \mathcal{C}'' + P''' \cos \mathcal{C}''' + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (67).$$

A l'égard de la troisième condition, en considérant d'abord le point C' (fig. 71*), nous avons les deux forces $P' \cos \alpha'$ et $P' \cos \mathcal{C}'$ appliquées à ce point. Prenant les momens de Fig. 71*.

Fig. 71*. ces forces par rapport à l'origine A, le moment de la force $P' \cos \alpha'$ sera

$$P' \cos \alpha' \times AE' = P' \cos \alpha' \times C'F' = P' \cos \alpha' \times b_{,};$$

de même le moment de la force $P' \cos 6'$ par rapport à l'origine A sera

$$P' \cos 6' \times C'E' = P' \cos 6' \times AF' = P' \cos 6' \times a_{,}.$$

Ces momens doivent être de signes contraires, parce que les forces $P' \cos \alpha'$ et $P' \cos 6'$ tendent à faire tourner le système en sens opposé autour de l'origine A. Ainsi en regardant comme positif le moment où entre la force $P \cos \alpha$ qui tend à pousser l'axe des y, nous écrirons

$$P' \cos \alpha' \times b_{,} - P' \cos 6' \times a_{,};$$

mettant dans cette expression les valeurs de $a_{,}$ et de $b_{,}$ trouvées article 123, nous aurons

$$P' \cos \alpha' \left(y' - \frac{z'P' \cos 6'}{P' \cos \gamma' - g'}\right) - P' \cos 6' \left(x' - \frac{z'P' \cos \alpha'}{P' \cos \gamma' - g'}\right);$$

effectuant les multiplications indiquées et réduisant, on trouvera

$$y'P' \cos \alpha' - x'P' \cos 6'.$$

Opérant de la même manière à l'égard des forces qui sont appliquées aux points C'', C''', etc., nous trouverons cette dernière équation d'équilibre

$$P' (y' \cos \alpha' - x' \cos 6') + P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \cos 6'') + \text{etc.} = 0 \ldots (68).$$

230. On peut écrire ainsi les équations (63), (64), (65), (66), (67), (68):

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma P \cos \alpha = 0 \\ \Sigma P \cos 6 = 0 \\ \Sigma P \cos \gamma = 0 \end{array}\right\} \ldots (69),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6) = 0 \\ \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0 \\ \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos 6) = 0\end{array}\right\}\ldots(70).$$ Fig. 71.

131. Lorsqu'il y a un point fixe dans le système, toutes ces équations ne sont pas nécessaires. En effet, si l'on place l'origine en ce point, on voit d'abord qu'il y aura équilibre entre les forces situées dans le plan des x, y, si le système de ces forces ne peut tourner autour du point fixe. Cette condition sera remplie si l'on a

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6) = 0.$$

Il ne s'agit donc plus que de trouver les conditions d'équilibre des forces parallèles à l'axe des z. Pour cet effet, soient $x_{,}$, $y_{,}$ et o les coordonnées du point où la résultante des forces parallèles rencontre le plan des x, y; en quelque part qu'elle soit située, il suit de la propriété des forces parallèles que le moment de cette résultante, par rapport à l'un des plans des x, z, et des y, z, est égal à la somme des momens des forces parallèles par rapport à ce plan; par conséquent nous avons

$$\begin{array}{l}Ra_{,} = \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \\ Rb_{,} = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos 6).\end{array}$$

Pour qu'il y ait équilibre entre les forces parallèles, il faut que leur résultante passe par le point fixe qui est à l'origine, ce qui exige qu'on ait $a_{,} = 0$, $b_{,} = 0$. Cette hypothèse réduit les équations précédentes à

$$\begin{array}{l}\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0, \\ \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos 6) = 0.\end{array}$$

Ainsi lorsqu'il y a un point fixe dans le système, il y aura équilibre entre toutes les forces, quand les équations (70) seront satisfaites.

132. S'il y a deux points fixes, et qu'on place l'un des axes coordonnés dans la direction de ces points, cet axe deviendra

Fig. 71*. fixe, le système ne pourra que tourner autour, et nous tomberons dans le cas suivant.

133. Si le système est assujéti à tourner autour d'un axe fixe, en prenant cet axe pour celui des z, toutes les forces qui lui seront parallèles se détruiront, et il ne restera plus que les forces dirigées dans le plan des x, y. Or, pour que ces forces soient en équilibre, il suffit que leur résultante passe par le point A qui est fixe, comme appartenant à l'axe Az. La condition nécessaire pour que la résultante passe par ce point est, comme nous l'avons vu, qu'on ait

$$\Sigma P (y \cos \alpha - x \cos 6) = 0.$$

Cette seule équation suffit pour qu'il y ait équilibre dans le système, lorsque l'axe des z est fixe.

134. Si l'on rendait fixe l'axe des y ou celui des x, on démontrerait de même que pour que le système fût en équilibre, il faudrait qu'on eût dans le premier cas

$$\Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0,$$

et dans le second,

$$\Sigma P (y \cos \gamma - z \cos 6).$$

135. On a besoin d'une condition d'équilibre de plus, lorsque le corps peut glisser sur l'axe fixe; cette condition est que l'on ait

$$\Sigma P \cos \gamma = 0.$$

136. En comparant la condition d'équilibre d'un système qui se meut autour d'un axe fixe, à celles qui ont lieu lorsque ce système est mobile autour d'un point fixe, on peut énoncer ainsi ces dernières conditions : *Il y aura équilibre autour d'un point fixe, si en regardant successivement chaque axe comme fixe, l'équilibre a lieu dans chacun de ces cas.*

137. A l'égard des forces qui agissent sur un plan fixe, il est évident que celles qui lui sont perpendiculaires sont dé-

truites par la résistance de ce plan; donc les conditions d'équilibre se réduisent alors à celles des forces situées dans un plan, et l'on a par conséquent Fig. 71*.

$$\Sigma P \cos \alpha = 0,$$
$$\Sigma P \cos 6 = 0,$$
$$\Sigma P (y \cos \alpha - x \cos 6) = 0.$$

138. Si un corps repose sur un plan et peut être renversé, il faut ajouter à ces trois conditions, celle que la résultante des forces perpendiculaires au plan passe par un point commun à ce plan et au corps, ou rencontre le polygone formé avec les points de contact.

139. Nous terminerons cette matière par la solution de ce problème : *Trouver l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que plusieurs forces situées dans l'espace aient une résultante unique.* Il y aura une résultante unique dans le système, si la résultante des forces parallèles à l'axe des z perce le plan des x, y en un point qui soit sur la résultante des forces situées dans le plan des x, y. Pour exprimer cette condition, il faut remarquer d'abord que lorsque l'équilibre a lieu, il existe aussi entre les forces parallèles à l'axe des z. Les conditions d'équilibre de ces forces sont, art. 128,

$$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} = 0,$$
$$P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) + P' (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + \text{etc.} = 0,$$
$$P (y \cos \gamma - z \cos 6) + P' (y' \cos \gamma' - z' \cos 6') + \text{etc.} = 0.$$

En regardant la première de ces forces comme égale et directement opposée à la résultante $P \cos \gamma$ de toutes les autres, nous aurons pour déterminer la résultante des forces parallèles,

$$P \cos \gamma = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.},$$
$$P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = P' (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + \text{etc.},$$
$$P (y \cos \gamma - z \cos 6) = P' (y' \cos \gamma' - z' \cos 6') + \text{etc.}$$

Si le point d'application de cette résultante est sur le plan

des x, y, soient $x_{,}$, $y_{,}$ et o, les coordonnées de ce point; en mettant ces valeurs à la place de x, de y et de z dans les premiers membres des équations précédentes, on aura

$$\begin{aligned} P\cos\gamma &= P'\cos\gamma' + \text{etc.}, \\ P\cos\gamma x_{,} &= P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \text{etc.}, \\ P\cos\gamma y_{,} &= P'(y'\cos\gamma' - z'\cos 6') + \text{etc.} \end{aligned}$$

Représentons par Z le facteur $P\cos\gamma$, et par M et N les seconds membres de deux de ces équations, elles deviendront

$$\begin{aligned} Z &= P'\cos\gamma' + \text{etc.}, \\ Zx_{,} &= M, \\ Zy_{,} &= N; \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$x_{,} = \frac{M}{Z}, \quad y_{,} = \frac{N}{Z}.$$

Ayant ainsi déterminé les coordonnées $x_{,}$ et $y_{,}$ du point où la résultante des forces parallèles rencontre le plan des x, y, il faut maintenant exprimer la condition nécessaire pour que ce point se trouve sur la résultante des forces situées dans le plan des x, y : l'équation de cette résultante est, art. 111,

$$Xy - xY = \Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6);$$

et en faisant, pour abréger,

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos 6) = L,$$

elle devient

$$Xy - xY = L;$$

remplaçant dans cette équation x et y par les valeurs de $x_{,}$ et de $y_{,}$ que nous venons de déterminer, nous exprimerons la condition demandée, et nous trouverons

$$\frac{XN}{Z} - \frac{MY}{Z} = L;$$

chassant les dénominateurs et transposant, nous aurons enfin

$$XN = LZ + MY \ldots (71).$$

Lorsque cette équation sera satisfaite, les forces se réduiront à une seule résultante, hors cependant le cas où l'on a

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o.$$

140. Dans le cas où toutes les forces agissent dans un même plan, et que ce plan est mobile autour d'un point fixe, l'équation (71) est nécessairement satisfaite, car les quantités N et M qui représentent la somme des momens par rapport aux plans des x, z et des y, z, étant nulles, ainsi que la quantité Z qui exprime les composantes $P \cos \gamma$, $P' \cos \gamma'$, $P'' \cos \gamma''$, etc., il en résulte que la condition exigée par l'équation (71), pour qu'il y ait une résultante unique, est remplie. Fig. 72.

141. D'après ce que nous avons vu, art. 114, les équations $X = o$ et $Y = o$ expriment la condition que les forces situées dans le plan des x, y, peuvent se réduire à deux composantes R' et R'' égales et agissant en sens contraires. Par un procédé analogue, on pourrait aussi réduire les forces parallèles à l'axe des z, à deux forces Z' et Z'' égales et agissant en sens contraires. Ainsi dans le cas où l'on a seulement $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, le système de toutes nos forces reviendra à celui de quatre forces R', R'', Z' et Z'' qu'on pourra réduire à deux forces égales et dirigées en sens contraires. (*Note cinquième.*)

Théorie du plan principal, et analogie qui existe entre les projections et les momens.

142. La théorie du plan principal, qui présente des analogies si frappantes avec celle des momens, est trop utile dans les hautes questions de Mécanique, pour que nous la passions sous silence; elle repose sur un théorème qui est démontré dans mes Élémens de Calcul intégral la note dont voici l'énoncé : *La projection d'une surface plane sur un plan est égale à l'aire de cette surface multipliée par le cosinus de son inclinaison.* (Note sixième.)

Il suit de ce théorème que si l'on nomme φ l'angle formé par deux plans, et λ l'aire d'une surface renfermée dans le premier plan, la projection de cette aire sur le second plan aura pour expression $\lambda \cos \varphi$. Or on sait (*note septième*) que l'angle φ formé par deux plans MF et EN

Fig. 72. (fig. 72), se mesure par deux perpendiculaires qui, partant d'un même point C, sont abaissées sur chacun des plans. Lorsque l'un de ces plans EN, par exemple, est celui des x, y, la perpendiculaire AH qui lui est relative devient parallèle à l'axe des z. Donc l'angle formé par le plan MF avec le plan des x, y, a pour mesure l'angle compris entre la perpendiculaire BK qui lui est menée, et la parallèle AH à l'axe des z.

En général, si l'on nomme α, β, γ, les angles qu'une perpendiculaire au plan donné forme respectivement avec les directions des axes des x, des y et des z, ces angles mesureront toujours les inclinaisons de ce plan avec les plans des y, z, des x, z, et des x, y.

143. Soient maintenant α, β, γ, et α', β', γ', les angles formés respectivement par deux plans quelconques avec les plans coordonnés, et que, d'après l'article précédent, on connaîtra en mesurant les angles que chacune des perpendiculaires aux plans donnés fait avec les axes coordonnés. Les cosinus de ces angles, introduits dans une formule que nous allons bientôt employer, nous mettront en état de conclure immédiatement la valeur du cosinus de l'angle φ qui est formé par ces deux plans; c'est cette formule que je vais démontrer de la manière suivante par un procédé nouveau.

Fig. 73. Menons par le point C (fig. 73) les droites CA, CB, perpendiculaires à nos deux plans, ces droites comprendront entre elles, comme nous l'avons vu, un angle égal à l'angle φ qui existe entre nos deux plans; prenons ensuite les parties CA et CB égales; représentons-les l'une et l'autre par r; menons par les extrémités de ces droites la ligne AB; et, abaissant sur CB la perpendiculaire AE, nous aurons

$$CA \cos \varphi = CE = CB - EB,$$

ou

$$r \cos \varphi = r - EB \ldots (72).$$

Pour déterminer EB, abaissons la perpendiculaire CD sur le milieu de AB; les triangles rectangles CDB, EAB qui ont un angle commun B, sont semblables et donnent la proportion

$$CB : BD :: AB : EB,$$

ou

$$r : \frac{AB}{2} :: AB : EB;$$

donc

$$EB = \frac{1}{2r} \overline{AB}^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (72), nous aurons

$$r \cos \varphi = r - \frac{1}{2r} \cdot \mathrm{AB}^2 \ldots \quad (73).$$

Il ne s'agit plus que de trouver l'expression analytique de AB^2. Pour cela, nous remarquerons que les droites CA et CB faisant avec les axes rectangulaires des angles α, β, γ, et ε, ε', ε'', les projections de ces droites seront respectivement (art. 47) $r \cos \alpha$, $r \cos \beta$, $r \cos \gamma$, et $r \cos \varepsilon$, $r \cos \varepsilon'$, $r \cos \varepsilon''$; d'un autre côté, si nous appelons X, Y et Z les coordonnées du point C, celles du point A seront

$$\mathrm{X} + r \cos \alpha, \quad \mathrm{Y} + r \cos \beta, \quad \mathrm{Z} + r \cos \gamma;$$

et celles du point B seront

$$\mathrm{X} + r \cos \varepsilon, \quad \mathrm{Y} + r \cos \varepsilon', \quad \mathrm{Z} + r \cos \varepsilon'';$$

substituant ces valeurs des coordonnées des points A et B dans l'expression du carré de la distance de deux points x', y', z', et x'', y'', z'', qui, comme on sait, est

$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

nous trouverons

$$\mathrm{AB}^2 = (r \cos \alpha - r \cos \varepsilon)^2 + (r \cos \beta - r \cos \varepsilon')^2 + (r \cos \gamma - r \cos \varepsilon'')^2;$$

mettant le facteur commun r en dehors, et développant, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 = {} & r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \\ & + r^2 (\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon' + \cos^2 \varepsilon'') \\ & - 2r^2 (\cos \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon' \cos \beta + \cos \varepsilon'' \cos \gamma). \end{aligned}$$

La somme des carrés des cosinus étant égale à l'unité (art. 49), cette équation se réduit à

$$\mathrm{AB}^2 = 2r^2 - 2r^2 (\cos \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon' \cos \beta + \cos \varepsilon'' \cos \gamma);$$

mettant cette valeur dans l'équation (73), réduisant et supprimant le facteur commun r, on trouvera

$$\cos \varphi = \cos \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon' \cos \beta + \cos \varepsilon'' \cos \gamma \ldots \quad (74).$$

144. Si l'angle φ est droit, $\cos \varphi = 0$, et l'équation devient

$$\cos \varepsilon \cos \alpha + \cos \varepsilon' \cos \beta + \cos \varepsilon'' \cos \gamma = 0.$$

145. La formule (74) va nous conduire à un théorème fort remarquable sur les projections. En effet, soient deux plans dont le premier fait avec les plans coordonnés des angles a, b, c, et dont le second fait avec les mêmes axes des angles α, β, γ; nous aurons, d'après la formule (74),

pour le cosinus φ de l'angle formé par ces plans, l'équation suivante,

$$\cos\varphi = \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma.$$

Or, si l'on représente par λ une surface plane renfermée dans le premier plan, et qu'on multiplie l'équation précédente par λ, on aura

$$\lambda\cos\varphi = \lambda\cos a\cos\alpha + \lambda\cos b\cos\beta + \lambda\cos c\cos\gamma \ldots (75).$$

Le produit $\lambda\cos\varphi$ est, d'après l'art. 142, la projection de l'aire λ sur le second plan, et les produits $\lambda\cos a$, $\lambda\cos b$, $\lambda\cos c$, sont de même les projections de l'aire λ sur les trois plans coordonnés.

146. On peut déduire de l'équation (75) l'énoncé de ce théorème : *La projection d'une surface plane λ sur un plan est égale à la somme des projections sur chacun des plans coordonnés, multipliées respectivement par les cosinus des angles α, β, γ, qui mesurent les inclinaisons du plan de projection sur les plans coordonnés.*

Ce théorème prend un nouveau degré de généralité, lorsqu'au lieu d'une aire λ projetée sur un plan, on considère les aires λ, λ', λ'', etc., placées dans différens plans, et projetées sur un plan dont les inclinaisons sur les plans coordonnés sont α, β, γ; appelons ce plan de projection α; β, γ, pour éviter les circonlocutions, et nommons

φ et a, b, c; } *les inclinaisons de l'aire* λ { *sur le plan* α, β, γ, *et sur les plans coordonnés;*

φ' et a', b', c'; } *les inclinaisons de l'aire* λ' { *sur le plan* α, β, γ, *et sur les plans coordonnés;*

φ'' et a'', b'', c''; } *les inclinaisons de l'aire* λ'' { *sur le plan* α, β, γ, *et sur les plans coordonnés.*

etc., etc. etc.

Opérant comme nous l'avons fait pour l'équation (75), nous aurons, en écrivant cette équation la première,

$$\begin{aligned}
\lambda\cos\varphi &= \lambda\cos a\cos\alpha + \lambda\cos b\cos\beta + \lambda\cos c\cos\gamma,\\
\lambda'\cos\varphi' &= \lambda'\cos a'\cos\alpha + \lambda'\cos b'\cos\beta + \lambda'\cos c'\cos\gamma,\\
\lambda''\cos\varphi'' &= \lambda''\cos a''\cos\alpha + \lambda''\cos b''\cos\beta + \lambda''\cos c''\cos\gamma,\\
+\text{etc.} &\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ajoutant ces équations par ordre de colonne, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda\cos\varphi + \lambda'\cos\varphi' + \lambda''\cos\varphi'' + \text{etc.})\\
&= (\lambda\cos a + \lambda'\cos a' + \lambda''\cos a'' + \text{etc.})\cos\alpha\\
&+ (\lambda\cos b + \lambda'\cos b' + \lambda''\cos b'' + \text{etc.})\cos\beta\\
&+ (\lambda\cos c + \lambda'\cos c' + \lambda''\cos c'' + \text{etc.})\cos\gamma
\end{aligned}\right\}\ldots (76)$$

Le premier membre de cette équation est la somme des projections des

aires λ, λ', λ'', etc., sur le plan α, $\mathcal{C}$, γ; et les termes renfermés entre les parenthèses désignent les sommes des projections des mêmes aires sur les plans coordonnés.

Par conséquent l'énoncé du théorème de l'art. 146 ne subit d'autre modification, pour le cas présent, si ce n'est que la surface qui doit être projetée sur le plan α, $\mathcal{C}$, γ, au lieu d'être l'aire λ, se compose de plusieurs aires λ, λ', λ'', etc., placées dans divers plans, ce qui est bien plus général.

147. Pour simplifier la dernière équation, représentons par P la somme des projections des aires λ, λ', λ'', etc., sur le plan α, $\mathcal{C}$, γ, et par A, B, C, la somme des projections des aires λ, λ', λ'', etc., sur les trois plans coordonnés, l'équation précédente se réduira à

$$P = A\cos\alpha + B\cos\mathcal{C} + C\cos\gamma \ldots \quad (77).$$

148. Il est à observer que quand on prendra la somme des aires, comme les cosinus qui entrent dans leurs expressions sont positifs ou négatifs, suivant que les angles a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', etc., sont moindres ou plus grands qu'un angle droit, ces sommes se changent quelquefois en différences. C'est pourquoi, dans l'énoncé du théorème précédent, nous ne devons entendre, par le mot de somme, que la somme algébrique des projections.

149. Supposons donc qu'on projette ensuite les aires λ, λ', λ'', etc., sur deux autres plans qui forment avec les plans coordonnés des angles α', $\mathcal{C}'$, γ', et α'', $\mathcal{C}''$, γ''; et, que l'on nomme P' et P'' les projections de $\lambda + \lambda' + \lambda''$, etc., sur les plans α', $\mathcal{C}'$, γ', et α'', $\mathcal{C}''$, γ'', on aura, en y comprenant l'équation (77) que nous écrirons la première, et en désignant toujours par A, B, C, les projections de $\lambda + \lambda' + \lambda''$, etc., sur les plans coordonnés,

$$\left.\begin{aligned} P &= A\cos\alpha + B\cos\mathcal{C} + C\cos\gamma, \\ P' &= A\cos\alpha' + B\cos\mathcal{C}' + C\cos\gamma', \\ P'' &= A\cos\alpha'' + B\cos\mathcal{C}'' + C\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \ldots (78).$$

150. Si les plans de projection P, P', P'' sont rectangulaires, il en sera de même de leurs intersections, qu'on pourra regarder comme trois axes rectangulaires qui se rencontrent en un point O. Par conséquent, en représentant par Ox', par Oy' et par Oz' ces trois nouveaux axes, ils seront respectivement perpendiculaires aux nouveaux plans coordonnés; mais les axes des x, des y et des z l'étaient aux anciens; donc les angles formés par ces anciens axes avec les nouveaux mesureront les inclinaisons des anciens plans coordonnés sur les nouveaux. Ces inclinaisons sont, par hypothèse, α, $\mathcal{C}$, γ; α', $\mathcal{C}'$, γ'; α'', $\mathcal{C}''$, γ''; et,

comme chacun des anciens axes correspond aux mêmes lettres grecques, quoique différemment accentuées, cela suffira pour nous faire reconnaître que

L'axe des x fait avec les nouveaux des angles α, α', α'',
L'axe des y fait avec les nouveaux des angles 6, $6'$, $6''$,
L'axe des z fait avec les nouveaux des angles γ, γ', γ'';

par conséquent il y aura entre ces nouveaux axes rectangulaires (art. 49) les relations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,\\ \cos^2 6 + \cos^2 6' + \cos^2 6'' = 1,\\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1.\end{array}\right\}\ldots (79).$$

D'un autre côté, en considérant à part ces nouveaux axes rectangulaires, on verra que l'angle formé par deux d'entre eux sera droit, et que le premier membre de l'équation (74) se réduisant à zéro, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha\cos 6 + \cos\alpha'\cos 6' + \cos\alpha''\cos 6'' = 0,\\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0,\\ \cos 6\cos\gamma + \cos 6'\cos\gamma' + \cos 6''\cos\gamma'' = 0.\end{array}\right\}\ldots (80).$$

151. Si l'on ajoute ensemble les carrés des équations (78), qu'on fasse la réduction au moyen des équations (79) et (80), et qu'on rassemble les termes affectés des mêmes produits des quantités A, B, C, on trouvera

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = A^2 + B^2 + C^2 \ldots (81);$$

ce qui nous annonce que la somme des carrés des projections des aires λ, λ', λ'', etc., sur trois plans rectangulaires, est toujours la même.

152. Nous allons tirer des conséquences importantes de ce théorème: résolvant l'équation (81) par rapport à P, on trouve

$$P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - P'^2 - P''^2}.$$

La plus grande valeur que puisse comporter ce radical est évidemment lorsque P' et P'' sont nuls. Dans ce cas, la somme P des projections de $\lambda + \lambda' + \lambda''$, etc., sur le plan dont les inclinaisons sont α, 6, γ, parvenue à son maximum, sera donnée par l'équation

$$P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \ldots (82).$$

Or, les angles α, α', α'', étant ceux qui sont formés par l'ancien axe des x avec les trois nouveaux axes qui sont rectangulaires, on doit avoir

$$A = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'';$$

en considérant les autres angles, on obtiendrait de même

$$B = P\cos\zeta + P'\cos\zeta' + P''\cos\zeta'',$$
$$C = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma''\ (*).$$

Par conséquent, dans l'hypothèse actuelle de $P' = 0$, et de $P'' = 0$, les équations précédentes se réduisent à

$$A = P\cos\alpha,\quad B = P\cos\zeta,\quad C = P\cos\gamma\ldots\ (83);$$

ce qui donne

$$\cos\alpha = \frac{A}{P},\quad \cos\zeta = \frac{B}{P},\quad \cos\gamma = \frac{C}{P}.$$

Et en mettant pour P sa valeur donnée par l'équation (82), on aura

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\zeta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{array}\right\}\ldots\ (84).$$

Telles seront les inclinaisons du plan et la plus grande projection, ou plan principal.

On voit que la détermination de ce plan ne dépendant que des angles dont nous venons de donner la valeur, tout plan parallèle à celui-ci jouit de la même propriété.

153. On démontre encore que la somme des projections des aires λ, λ', λ'', etc., est la même pour tous les plans également inclinés sur le plan principal. En effet, soit Q la somme des projections sur un plan quelconque qui ait a, b, c pour inclinaisons avec les plans coordonnés; si nous représentons toujours par A, B, C, les projections des mêmes aires sur ces plans coordonnés, nous aurons

$$Q = A\cos a + B\cos b + C\cos c;$$

mais si α, ζ, γ désignent les inclinaisons du plan principal, les équations (83) qui sont

$$A = P\cos\alpha,\quad B = P\cos\zeta,\quad C = P\cos\gamma,$$

(*) On peut déduire immédiatement ces équations des équations (78), en multipliant la 1re par $\cos\alpha$, la 2e par $\cos\alpha'$, la 3e par $\cos\alpha''$, et en réduisant la somme à l'aide de l'équation $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$, et des quantités multipliées par B et par C, qui sont nulles.

réduiront l'équation précédente à

$$Q = P(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \mathcal{C} + \cos c \cos \gamma).$$

La quantité renfermée entre les parenthèses équivalant au cosinus de l'angle formé par le plan principal α, $\mathcal{C}$, γ, et le plan quelconque a, b, c, si nous nommons θ cette inclinaison, nous aurons

$$Q = P \cos \theta,$$

et comme P représente la somme des projections sur le plan principal, qui, art. 152, est $P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, nous obtiendrons, en restituant cette valeur,

$$Q = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} . \cos \theta \ldots \quad (85).$$

Or, les projections A, B, C restant les mêmes pour tous les plans également inclinés, il suit de l'équation (85) que la valeur de Q, c'est-à-dire la somme des projections sur un plan, sera la même pour tous les plans qui formeront le même angle avec le plan principal.

On voit, en outre, que cette somme croît ou diminue proportionnellement à $\cos \theta$.

154. Enfin, on peut remarquer que, pour tout plan perpendiculaire au plan principal, la somme des projections est égale à zéro; car l'hypothèse de $\theta = 100°$ annulant le second terme de l'équation (85), donne $Q = 0$.

155. Tous les théorèmes qui viennent d'être démontrés sur les projections et sur le plan principal peuvent s'appliquer aux momens. En effet, plaçons le centre des momens à l'origine des coordonnées, et supposons que le plan α, $\mathcal{C}$, γ passe par cette origine; si par les points d'application des forces et dans leurs directions, nous prenons des droites proportionnelles à leurs intensités, nous pourrons représenter ces droites par les lettres P, P', P'', etc. Cela posé, le centre C des momens peut être regardé comme le sommet des triangles dont P, P', P'', etc., seraient les bases; les projections de ces triangles sur le plan α, $\mathcal{C}$, γ, et sur les plans coordonnés, seront d'autres triangles qui auront pour bases les projections p, p', p'', etc., des côtés P, P', P'', etc., et pour hauteurs les perpendiculaires h, h', h'', etc., abaissées du centre C sur les droites p, p', p'', etc.; de sorte qu'en substituant ces valeurs dans l'équation (76), qui revient à

$$\Sigma\,(\textit{projections sur le plan } \alpha, \mathcal{C}, \gamma) = \Sigma \begin{pmatrix} \textit{projections sur les plans} \\ \textit{coord. multip. respectiv.} \\ \textit{par les cosin. des inclin.} \end{pmatrix},$$

elle se changera en

$$\tfrac{1}{2}ph + \tfrac{1}{2}p'h' + \tfrac{1}{2}p''h'' + \text{etc.} = \Sigma \left(\begin{array}{l}\textit{projections sur les plans}\\ \textit{coord. multip. par les}\\ \textit{cosin. des inclin.}\end{array}\right) \ldots (86).$$

Le second membre contenant des produits analogues, on voit que $\frac{1}{2}$ sera facteur commun; donc, en le supprimant, le premier membre de cette équation se réduira à

$$ph + p'h' + p''h'' + \text{etc.}$$

Or, p, p', p'', etc., étant les projections des droites P, P′, P″, etc., les produits ph, $p'h'$, $p''h''$, etc., seront les momens des droites p, p', p'', etc., pris par rapport à l'origine. Ce que nous disons du premier membre de l'équation (86) pouvant s'appliquer au second, on voit que la somme des momens des projections des forces sur le plan α, ζ, γ, qui passe par l'origine, est égale aux trois sommes des momens des projections des mêmes forces sur les plans coordonnés, multipliés respectivement par les cosinus des inclinaisons.

156. En faisant des substitutions semblables dans l'équation (81), on trouvera de même que les sommes des carrés des momens de différentes forces, par rapport à trois plans rectangulaires, est constante.

Les équations (83), à leur tour, nous feront connaître la position du plan pour lequel la somme des momens est le plus grand. Enfin, l'équation (82), modifiée dans le même sens, nous donnera la valeur de la somme des momens sur le plan principal.

Du centre de gravité.

157. Toutes les parties de la matière sont soumises à une force qui les entraîne vers la terre perpendiculairement à sa surface. Cette force est la gravité ou pesanteur.

La terre étant presque sphérique, les directions des différens points matériels qui la composent concourent à peu près à son centre; et comme ce centre est très éloigné de la surface de la terre, on peut, sans erreur sensible, supposer ces directions parallèles.

158. On a observé que lorsqu'on s'écartait du centre de la terre, la pesanteur diminuait en raison inverse du carré de la distance qui se trouve comprise entre ce centre et le lieu où

l'on est. Par exemple, si un corps est placé à une distance du centre de la terre, prise pour unité, et qu'il soit ensuite transporté à des distances représentées par les nombres 2, 3, 4, etc., la pesanteur deviendra successivement $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, etc., ou $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, etc., de ce qu'elle était lorsque le corps se trouvait à l'unité de distance.

159. La terre étant aplatie vers les pôles, et renflée à l'équateur, il suit de là qu'en allant vers les pôles, on s'approche du centre de la terre, et que par conséquent la pesanteur doit augmenter d'intensité. Nous verrons, lorsque nous parlerons de la force centrifuge, qu'il est une autre cause qui fait que l'intensité de la pesanteur est plus grande au pôle qu'en tout autre lieu.

160. La pesanteur transmettant son action à toutes les molécules d'un corps, les soumet donc à des forces dont on peut regarder les directions comme parallèles; la résultante de toutes ces forces, qui est égale à leur somme, constitue le poids du corps.

Il suit de cette définition que dans les corps homogènes, les poids sont proportionnels à leurs volumes.

161. La densité d'un corps est la plus ou moins grande quantité de matière qu'il renferme sous un volume donné. On a pris pour unité de densité le gramme, qui est la quantité de matière que contient le centimètre cube d'eau distillée au maximum de la condensation. Si l'on compare le gramme au centimètre cube d'une autre substance que l'eau distillée, ce centimètre cube renfermera le gramme un nombre de fois que je représenterai par ρ; et qui, suivant le cas, sera au-dessus ou au-dessous de l'unité. Ce coefficient ρ est ce qu'on appelle *la densité de la substance* à laquelle il se rapporte. Par exemple, si ρ est la densité de l'or, nous aurons l'équation

un centimètre cube d'or $= \rho \times$ *un gramme;*

d'où nous tirerons

$$\varrho = \frac{\textit{un centimètre cube d'or}}{\textit{un gramme}}.$$

162. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que la matière comprise dans le centimètre cube que nous avons pris pour unité de mesure; mais si nous voulons évaluer la quantité de matière comprise dans un corps homogène dont le volume V est donné, il faudra répéter le nombre ϱ de grammes renfermés dans l'unité de mesure, autant de fois que le volume V contient d'unités, ce qui nous donnera l'équation

$$M = V\varrho \ldots \quad (87).$$

M est ce qu'on appelle *la masse;* on voit que c'est la quantité de matière renfermée dans un corps.

163. Si la pesanteur ne variait pas d'un lieu à l'autre, le poids d'un corps pourrait en représenter la masse; dans ce cas, il serait permis de poser l'équation

$$P = M \ldots \quad (88);$$

mais si en transportant la masse M à une autre distance du centre de la terre, le poids P change d'intensité, il faudra, pour maintenir l'égalité dans l'équation précédente, multiplier M par un certain coefficient que j'appelerai g; de sorte que nous aurons l'équation

$$P = Mg \ldots \quad (89);$$

et alors g sera un coefficient dont la valeur se modifiera suivant le lieu où le corps sera transporté, tandis que M sera toujours constant et représentera le poids du corps dans le lieu qui se rapporte à l'équation (88); ou, ce qui est la même chose, dans le lieu où ce coefficient g est égal à l'unité.

Ce coefficient g est la mesure de la pesanteur.

164. Des deux équations (87) et (88) on tire celle-ci,

$$P = V\varrho g,$$

ce qui nous indique que le poids varie proportionnellement à la pesanteur g, à la densité ϱ et au volume V du corps.

165. Par exemple, la pesanteur et le volume étant les mêmes dans deux corps, celui dont la densité serait n fois plus grande, aurait un poids n fois plus grand.

Dans un même lieu, la pesanteur étant constante, g aura la même valeur pour chaque poids.

166. Si à différens points liés entre eux d'une manière invariable, et dont les coordonnées sont respectivement x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; etc., on applique les poids P′, P″, P‴, etc., en considérant ces poids comme des forces parallèles, nous pourrons, art. 80 et 81, déterminer les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ du centre des forces parallèles, et nous aurons

$$x_{,}=\frac{Px+P'x'+P''x''+\text{etc.}}{P+P'+P''+\text{etc.}},$$

$$y_{,}=\frac{Py+P'y'+P''y''+\text{etc.}}{P+P'+P''+\text{etc.}},$$

$$z_{,}=\frac{Pz+P'z'+P''z''+\text{etc.}}{P+P'+P''+\text{etc.}}.$$

167. Lorsque les forces, comme dans le cas présent, agissent par l'effet de la pesanteur, le centre des forces parallèles porte le nom de *centre de gravité*. Soient m, m', m'', etc., les masses qui correspondent aux poids P, P′, P″, etc., on aura

$$P=mg,\quad P'=m'g,\quad P''=m''g:$$

en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et en divisant les deux termes de chaque fraction par g, on obtiendra

$$x_{,}=\frac{mx+m'x'+m''x''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}},$$

$$y_{,}=\frac{my+m'y'+m''y''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}},$$

$$z_{,}=\frac{mz+m'z'+m''z''+\text{etc.}}{m+m'+m''+\text{etc.}};$$

ce qui nous apprend que la position du centre de gravité est indépendante de la pesanteur.

168. Si les corps sont d'une substance homogène, en appelant ϱ leur densité, et v, v', v'', etc., leurs volumes, on aura, art. 162,

$$m = v\varrho,\quad m' = v'\varrho,\quad m'' = v''\varrho,\quad \text{etc.};$$

et en opérant comme précédemment, on trouvera

$$x_{,} = \frac{vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.}}{v + v' + v'' + \text{etc.}},$$

$$y_{,} = \frac{vy + v'y' + v''y'' + \text{etc.}}{v + v' + v'' + \text{etc.}},$$

$$z_{,} = \frac{vz + v'z' + v''z'' + \text{etc.}}{v + v' + v'' + \text{etc.}};$$

et en nommant V le volume de tout le système, ces équations deviendront

$$x_{,} = \frac{vx + v'x' + \text{etc.}}{V},$$

$$y_{,} = \frac{vy + v'y' + \text{etc.}}{V},$$

$$z_{,} = \frac{vz + v'z' + \text{etc.}}{V}.$$

169. On peut déterminer, par une expérience, le centre de gravité d'un corps, de la manière suivante. On suspend (fig. 74) ce corps à un fil CA, et le prolongement AB de la direction du fil passera par le centre de gravité. Pour connaître ensuite sur quel point de la droite AB est situé le centre de gravité, on suspendra le corps par un autre point, et la verticale EF dirigée suivant le prolongement du fil, devant contenir le centre de gravité, il sera au point d'intersection G de ces deux lignes. Fig. 74.

Dans cette expérience, le corps n'étant retenu que par

celui de ses points auquel est attaché le fil, il faut que la résultante passe par ce point; et comme elle est verticale, sa direction est celle du fil.

Fig. 75. 170. Le centre de gravité d'une droite AB (fig. 75) est à son milieu C; car en la considérant comme chargée de points matériels pesans, chaque molécule m située d'un côté du point C, correspondra à une autre molécule m', également distante de C; par conséquent les momens $m \times Cm$ et $m' \times Cm'$ seront égaux. Ce que nous disons des molécules m et m' pouvant s'appliquer à toutes celles de la droite AB, prises deux à deux, il en résulte que la somme des momens de toutes les molécules, par rapport au point C, est égale à zéro; donc le moment de la résultante sera nul, et par conséquent la résultante passera par le point C qui se trouve au milieu de la droite AB.

Fig. 76. 171. Le centre de gravité d'un parallélogramme AD (fig. 76) est à l'intersection G des droites EF et HK qui partagent les côtés parallèles en deux parties égales.

En effet, si l'on conçoit que toutes les molécules du parallélogramme soient disposées sur des parallèles à AB, les centres de gravité de toutes ces parallèles se trouveront sur la droite EF qui passe par les milieux E et F des côtés opposés CD et AB; car EF coupe toutes ces parallèles en deux parties égales. Il suit de là que le centre de gravité du parallélogramme doit se trouver sur EF. On prouverait de même que HK, qui divise CA et DB en deux parties égales, contient aussi le centre de gravité du parallélogramme; donc ce centre de gravité est au point d'intersection G des droites EF et HK.

Fig. 77. 172. Le centre de gravité de l'aire d'un triangle ABC (fig. 77) se trouve en menant une ligne CD sur le milieu de la base AB, et en prenant la partie DG égale au tiers de CD. Pour le démontrer, on va d'abord faire voir qu'il est sur cette droite CD. En effet, CD passant par les milieux de toutes les

parallèles à AB, contient le centre de gravité de l'aire du triangle : il en est de même d'une droite AE qui passerait par le milieu de CB; donc le centre de gravité de l'aire du triangle est au point d'intersection G de ces droites. Il reste à prouver que G est au tiers de CD, à partir de la base. Pour cela, ayant mené la droite DE, les triangles ACB, DEB sont semblables; car les côtés BD et EB étant les moitiés de AB et de CB, ces triangles qui ont un angle compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables; d'où il suit que DE est parallèle à AC; donc les triangles ACG et DEG sont aussi semblables et donnent

$$CG : GD :: AC : DE :: AB : BD :: 2 : 1;$$

donc

$$CG = 2GD;$$

et par conséquent,

$$CD \text{ ou } CG + GD = 3GD;$$

d'où l'on tire

$$GD = \tfrac{1}{3} CD.$$

173. *Trouver le centre de gravité d'un polygone.* On le décomposera (fig. 78) en triangles; et nommant a, a', a'', etc., Fig. 78.
les aires ABC, ACD, ADE, etc., de ces triangles, on regardera a, a', a'', etc., comme des poids appliqués aux centres de gravité G, G', G'', etc., des triangles ABC, ACD, etc. Le centre de gravité de l'aire ABCDA se trouvera par la proportion

$$a + a' : a :: GG' : G'O.$$

On cherchera ensuite le centre de gravité K de l'aire ABCDEA, en déterminant la résultante de $a + a'$ agissant en O, et de a'' agissant en G''. Pour cela on établira la proportion

$$a + a' + a'' : a'' :: OG'' : OK,$$

et ainsi de suite.

174. Le même problème pourrait aussi se résoudre par la considération des forces parallèles. En effet, soient $x_{,}$ et $y_{,}$ les Fig. 79. coordonnées du centre de gravité du polygone (fig. 79) : la théorie des forces parallèles nous fournit ces équations,

$$R = P + P' + P'' + P''',$$
$$Rx_{,} = Px + P'x' + P''x'' + P'''x''',$$
$$Ry_{,} = Py + P'y' + P''y'' + P'''y'''.$$

Nommons toujours a, a', a'', etc., les aires des triangles ABC, ACD, ADE, AEF, etc., nous aurons

$$P = a, \quad P' = a', \quad P'' = a'', \quad P''' = a''',$$

et les équations précédentes nous donneront

$$R = a + a' + a'' + a''',$$
$$x_{,} = \frac{ax + a'x' + a''x'' + a'''x'''}{a + a' + a'' + a'''},$$
$$y_{,} = \frac{ay + a'y' + a''y'' + a'''y'''}{a + a' + a'' + a'''}.$$

Ayant donc pris ensuite $OP = x_{,}$, on mènera la parallèle $PG = y_{,}$ à l'axe des y, et le point G sera le centre de gravité.

175. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone.* On opérera comme précédemment, en remarquant que le centre de gravité de chaque côté étant à son milieu, on peut regarder les milieux des côtés du polygone comme chargés de poids proportionnels à ces côtés.

176. *Trouver le centre de gravité d'un arc de courbe plane.* Fig. 80. L'élément mm' d'un arc de courbe plane (fig. 80) étant $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on peut, à cause que cet arc est infiniment petit, regarder son centre de gravité comme placé en son milieu o, et mettre les coordonnées x et y du point m à la place de celle du point o; par conséquent, le moment de mm', par rapport à l'axe des x, est

$$op \times mm' = y\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et par rapport à l'axe des y,

$$oq \times mm' = x\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Nommant $x_{,}$ et $y_{,}$ les coordonnées du centre de gravité, et s la longueur de l'arc MM', les momens de cet arc, par rapport à chacun des axes, seront respectivement $sx_{,}$ et $sy_{,}$; ces momens devant être égaux à la somme des momens des élémens, nous aurons

$$sy_{,} = \int y\sqrt{dx^2 + dy^2},$$
$$sx_{,} = \int x\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et la longueur de l'arc MM' sera donnée par l'équation

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

177. Cherchons, par exemple, le centre de gravité d'un arc de cercle BO (fig. 81). Pour cet effet, on disposera les axes coordonnés de manière que cet arc soit partagé en deux parties égales par l'axe des abscisses; alors le centre de gravité de l'arc BO sera sur cet axe, et l'on aura $y_{,} = 0$. Pour le démontrer, remarquons que les centres de gravité g et g' des arcs égaux BD et DO devant être disposés symétriquement à l'égard de l'axe des x, il faut que le centre de gravité G de l'arc total BO soit sur l'axe des x, au milieu G de gg'. Il ne s'agit donc plus que de connaître l'abscisse AG $= x_{,}$ du centre de gravité de l'arc BD, puisque cette abscisse doit être la même que celle du centre de gravité de l'arc BO. Or $x_{,}$ est donné, art. 176, par l'équation Fig. 81.

$$sx_{,} = \int x\sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots \quad (90).$$

Pour intégrer le second membre de cette équation, nous allons chercher à le réduire à une seule variable au moyen de l'é-

Fig. 81. quation du cercle qui est

$$y^2 = a^2 - x^2 \;..\; (91);$$

différentiant cette équation, nous trouverons, en supprimant le facteur commun,

$$ydy = -xdx,$$

d'où nous tirerons

$$dx^2 = \frac{y^2dy^2}{x^2},$$

et en substituant cette valeur dans la formule $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, nous obtiendrons

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2} \cdot dy^2};$$

réduisant au moyen de l'équation (91) et extrayant la racine carrée, on aura

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{x},$$

substituant cette valeur dans l'équation (90), intégrant et représentant par B la constante arbitraire, nous trouverons

$$\int x \sqrt{dx^2 + dy^2} = ay + \text{B} \;..\; (92).$$

Nommons c la corde BO, et cherchons l'arc soutenu par cette corde. Pour cela, il faudra prendre l'intégrale entre les limites $y = \frac{1}{2}c$ et $y = -\frac{1}{2}c$. L'arc s'étendant de O en B, cette intégrale doit être nulle au point O, dont l'ordonnée est $y = -\frac{1}{2}c$. Cette hypothèse réduit l'équation (92) à

$$o = -\tfrac{1}{2}ac + \text{B}:$$

éliminant B au moyen de l'équation (92), on obtiendra

$$\int x \sqrt{dx^2 + dy^2} = ay + \tfrac{1}{2}ac;$$

faisant $y = \frac{1}{2}c$ pour prendre l'intégrale définie depuis le

point O jusqu'au point B, on obtient

$$\int x \sqrt{dx^2 + dy^2} = ac;$$

substituant cette valeur dans l'équation (90), on trouvera

$$sx_i = ac,$$

d'où l'on tirera

$$x_i = \frac{rayon \times corde}{arc} \ldots (93);$$

ce qui nous apprend que *l'abscisse du centre de gravité est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.*

178. Pour trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, on mènera par le sommet et par le centre de gravité de la base, une droite AG (fig. 82), et en prenant GO $= \frac{1}{4}$ AG, le point O sera le centre de gravité de la pyramide. Fig. 82.

Pour le démontrer, imaginons que cette pyramide soit partagée en tranches parallèles à la base BCD; la droite AG passant par les centres de gravité de toutes les tranches, contiendra le centre de gravité de la pyramide. De même par le sommet D de l'angle D, et par le centre de gravité G' de la face opposée ABC, menons la droite DG' : cette droite contiendra le centre de gravité de la pyramide; par conséquent lorsqu'on aura prouvé que ces droites se rencontrent en un point O, on pourra conclure que le centre de gravité cherché est en ce point.

Or pour démontrer que les droites AG et DG' se coupent en un même point, il suffit de remarquer que ces droites ayant chacune leurs points extrêmes situés dans le plan AED, elles y sont comprises l'une et l'autre, et par conséquent elles doivent se rencontrer en un point O.

Pour déterminer ce point, menons la droite GG' : les triangles G'EG et AED sont semblables; car ils ont un angle compris entre deux côtés proportionnels, vu que EG $= \frac{1}{3}$ ED,

et que $EG' = \frac{1}{3} EA$; donc GG' est parallèle à AD. Cela posé, à cause des triangles semblables OGG' et OAD, on a

$$GG' : AD :: GO : OA;$$

les triangles semblables EGG' et EAD nous donnent aussi

$$GG' : AD :: EG : ED.$$

En comparant les seconds rapports de ces proportions, on en conclut cette troisième,

$$GO : OA :: EG : ED :: 1 : 3;$$

donc

$$3GO = OA;$$

ajoutant GO de part et d'autre, on a

$$4GO = OA + GO = AG;$$

donc

$$GO = \frac{1}{4} AG.$$

179. En général, le centre de gravité d'une pyramide po-
Fig. 83. lygonale ABCD (fig. 83) est au quart de la droite SF, qui, du centre de gravité de la base, est menée au sommet de la pyramide. Pour le démontrer, ayant pris $FO = \frac{1}{4} SF$, et mené par le point O un plan parallèle à la base de la pyramide, ce plan contiendra le centre de gravité. En effet, si par le centre de gravité F de la base, on mène les droites FA, FB, FC, FD, etc., au sommet des angles du polygone, on formera autant de triangles qu'il a de côtés; ces triangles pourront servir de bases à un égal nombre de pyramides triangulaires qui auront le même sommet S. Toutes les lignes menées du sommet S aux centres de gravité de ces triangles seront coupées proportionnellement par le plan qu'on a mené parallèlement à la base; d'où il suit que ces lignes seront toutes coupées par ce plan au quart de leurs longueurs, à partir de la base. Ces points d'intersection seront donc les centres de gra-

vité des pyramides partielles. Ces centres de gravité étant renfermés dans le plan que nous avons mené parallèlement à la base, il en résulte que le centre de gravité de la pyramide polygonale sera dans ce plan. D'une autre part, la droite SF contient aussi le centre de gravité de la pyramide polygonale, puisque cette droite passe par les centres de gravité de toutes les sections parallèles à la base. Ainsi le centre de gravité de la pyramide polygonale est au point O, où la section que nous avons menée parallèlement à la base rencontre la droite SF; c'est-à-dire est au quart de la droite SF, à partir de la base.

180. *Trouver le centre de gravité d'un arc de courbe à double courbure, ou en général celui d'une ligne quelconque située dans l'espace.* On sait que l'élément d'une courbe à double courbure a pour expression

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ (*) \ldots \quad (94).$$

Prenons les momens de cet élément par rapport aux plans

(*) Pour le démontrer, soient M et M' (fig. 84) deux points situés dans l'espace, et dont les coordonnées sont x, y, z et x', y', z', on aura Fig. 84.

$$corde\ \text{MM}' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \ldots \quad (95).$$

Si la différence des abscisses x et x' est représentée par h, la formule de Taylor nous donnera

$$y' = \text{F}(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$
$$z' = f(x+h) = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle de $x-x'$ qui est h, dans l'équation (95), nous trouverons

$$corde\ \text{MM}' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{dy^2}{dx^2} + \text{etc.}\right)h^2 + \left(\frac{dz^2}{dx^2} + \text{etc.}\right)h^2}.$$

coordonnés. Comme x, y, z représentent les distances de cet élément aux plans des y, z, des x, z et des x, y, ces momens seront

$$x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$
$$y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$
$$z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2};$$

par conséquent en nommant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du centre de gravité, et s l'arc de courbe, on déterminera ces quantités par les équations.

$$\left.\begin{aligned} s &= \int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \\ sx_{,} &= \int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \\ sy_{,} &= \int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \\ sz_{,} &= \int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \end{aligned}\right\}\ldots\ (96)$$

181. Appliquons ces formules à la détermination du centre de gravité d'une droite située dans l'espace. Pour cet effet, plaçons l'origine à l'une des extrémités de cette droite, ses équations seront

$$x = \alpha z,\quad y = \beta z \ldots\ (97),$$

d'où l'on tirera

$$dx = \alpha dz,\quad dy = \beta dz.$$

Cette équation divisée par h nous donne

$$\frac{\text{corde MM}'}{h} = \sqrt{1+\left(\frac{dy^2}{dx^2}+\text{etc.}\right)+\left(\frac{dz^2}{dx^2}+\text{etc.}\right)};$$

passant à la limite, on obtient

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}},$$

et par conséquent,

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Substituant ces valeurs de dx et de dy dans l'expression (94), nous trouverons

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{\alpha^2 + \mathsf{6}^2 + 1};$$

et en représentant, pour simplifier, le radical par A, nous pourrons écrire

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \mathrm{A}dz.$$

Substituant dans les équations (96) cette valeur, ainsi que celles de x et de y données par les équations (97), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} s &= \int \mathrm{A}dz, \\ sx_{,} &= \int \mathrm{A}\alpha z dz, \\ sy_{,} &= \int \mathrm{A}\mathsf{6} z dz, \\ sz_{,} &= \int \mathrm{A}z dz. \end{aligned}$$

Soit h l'ordonnée z du point M (fig. 85). Si nous voulons déterminer le centre de gravité de la droite AM, il faudra intégrer entre les limites $z = 0$ et $z = h$, et de cette manière nous trouverons Fig. 85.

$$\begin{aligned} s &= \mathrm{A}h, \\ sx_{,} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\alpha h^2, \\ sy_{,} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\mathsf{6}h^2, \\ sz_{,} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{A}h^2. \end{aligned}$$

Éliminant s et réduisant, nous obtiendrons

$$x_{,} = \tfrac{1}{2}\alpha h, \quad y_{,} = \tfrac{1}{2}\mathsf{6}h, \quad z_{,} = \tfrac{1}{2}h.$$

Ces valeurs sont précisément les coordonnées du point O qui est le milieu de la droite AM ; car si AO est la moitié de AM, les triangles semblables AOQ, AMP, nous donneront

$$\mathrm{OQ} = \tfrac{1}{2}\mathrm{MP} = \tfrac{1}{2}h.$$

Substituant cette valeur dans les équations (97), nous obtien-

drons

$$x = \tfrac{1}{2}ah, \qquad y = \tfrac{1}{2}bh.$$

182. *Trouver l'aire d'une surface plane comprise entre un arc de courbe et l'axe des abscisses.* Soient $x_{,}$ et $y_{,}$ les coor-
Fig. 86. données du centre de gravité, et AN (fig. 86), GN celles d'un élément MPM'P'; l'aire de cet élément étant ydx (*Élémens de Calcul intégral*, art. 348), le moment de ydx par rapport à l'axe des x sera $\text{GN}\times ydx$, et son moment par rapport à l'axe des y sera $\text{AN}\times ydx$. On peut, dans le cas de la limite, substituer AP à AN, et $\frac{\text{PM}}{2}$ à GN; par conséquent $\frac{y^2}{2}dx$ et $xydx$ seront les momens de l'élément par rapport aux axes des x et des y. Représentons par λ l'aire DBMP; cette surface ainsi que les coordonnées du centre de gravité, seront déterminées par les équations

$$\lambda = \int ydx,$$

$$\lambda x_{,} = \int xydx, \ldots \; (98).$$

$$\lambda y_{,} = \int \frac{y^2}{2}\,dx.$$

183. Pour application de ces formules, *cherchons le centre*
Fig. 87. *de gravité de l'aire d'un segment circulaire CDE* (fig. 87). Si l'on prend pour origine le centre du cercle, et pour axe des abscisses une droite AD qui partage le segment en deux parties égales, le centre de gravité de ce segment sera sur cette droite : il ne s'agit donc plus que de calculer $\text{AG} = x_{,}$. Pour cet effet, je remarque que g et g' sont les centres de gravité des segmens CBD, BDE; ces segmens étant semblablement situés à l'égard de l'axe des x, g et g' seront à égale distance de cet axe, et se trouveront aux extrémités d'une ligne gg' coupée à angles droits et en deux parties égales, par l'axe Ax, et en ce point d'intersection se trouvera le centre de gravité G du segment.

La question se réduisant à trouver l'abscisse $x_{,}$ du centre de gravité du segment CDB, la valeur de $x_{,}$ nous sera donnée par l'équation (98), dont nous pourrons déterminer l'intégrale du second membre, lorsque nous aurons éliminé l'une des variables. Pour parvenir à ce but, l'équation du cercle étant différentiée, nous donne Fig. 87.

$$ydy = -xdx:$$

tirant de cette équation la valeur de xdx, et la substituant dans la formule (98), nous trouverons

$$\lambda x_{,} = \int -y^2dy \ldots \quad (99);$$

intégrant et nommant A la constante arbitraire, nous aurons

$$\int -y^2dy = -\tfrac{1}{3}y^3 + \text{A} \ldots \quad (100).$$

Pour déterminer la constante, nous prendrons l'intégrale depuis le point C jusqu'au point D; or le point C ayant pour ordonnée CB qui est la moitié de la corde CE, si nous nommons c cette corde, nous devrons prendre l'intégrale depuis $y = \frac{c}{2}$ jusqu'à $y = 0$. Ainsi en supposant que l'intégrale s'évanouisse lorsque $y = \frac{c}{2}$, la constante A sera déterminée par l'équation

$$o = -\frac{c^3}{24} + \text{A},$$

et l'équation (100) deviendra

$$\int -y^2dy = -\tfrac{1}{3}y^3 + \frac{c^3}{24}.$$

Faisant $y = 0$ pour que l'intégrale s'étende depuis C jus-

qu'en D, on aura

$$\int -y'dy = \frac{c^3}{24}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (99) et divisant par λ, on obtiendra

$$x_{,} = \frac{c^3}{24\lambda};$$

λ représentant l'aire CBD, nous avons

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\, aire\ \mathrm{CDEB}.$$

Substituant cette valeur de λ dans l'équation précédente, nous trouverons

$$x_{,} = \frac{c^3}{12\ aires\ \mathrm{CDEB}};$$

ce qui nous apprend que la distance du centre de gravité du segment CDEB à l'axe des y, est égale au cube de la corde, divisé par 12 fois l'aire du segment.

184. *Trouver le centre de gravité G du secteur CAE* (fig. 88). Il est d'abord évident que ce centre de gravité est sur la droite AB qui divise le secteur en deux parties égales ; il ne s'agit donc que de connaître AG. Pour cela, en regardant le secteur comme composé d'un nombre infini de secteurs élémentaires, le centre de gravité de chacun sera aux deux tiers du rayon, parce qu'on peut les considérer comme autant de triangles. D'où il suit que si avec un rayon AH égal aux deux tiers de AC, on décrit l'arc HK, cet arc contiendra les centres de gravité de tous les secteurs élémentaires ; par conséquent le centre de gravité de l'arc HK sera celui du secteur CAE. Cela posé, si l'on nomme $x_{,}$ l'abscisse AG du point G, nous aurons, art. 179,

$$x_{,} = \frac{\mathrm{AH} \times corde\ \mathrm{HK}}{arc\ \mathrm{HK}};$$

or, par la similitude des secteurs AHK et ACE, nous avons

$$\begin{aligned} AH &= \tfrac{2}{3}\, AC, \\ \textit{corde}\ HK &= \tfrac{2}{3}\, \textit{corde}\ CE, \\ \textit{arc}\ HK &= \tfrac{2}{3}\, \textit{arc}\ CE. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente et réduisant, nous trouverons

$$x_{,} = \frac{\tfrac{2}{3}\, AC \times \textit{corde}\ CE}{\textit{arc}\ CE}.$$

185. *Trouver le centre de gravité de l'aire OBO'* (fig. 89) *comprise entre deux branches de courbe.* Fig. 89.

Soient $PM = y$ et $PM' = y'$ deux ordonnées qui correspondent à la même abscisse $AP = x$. L'élément MM'N'N de la surface aura pour expression

$$\textit{aire}\ PN - \textit{aire}\ PN' = ydx - y'dx = (y - y')\,dx:$$

et si nous représentons par λ une portion de la surface comprise entre deux cordes MM', OO', nous aurons

$$\lambda = \int (y - y')\,dx.$$

Pour trouver le centre de gravité de cette portion de surface, cherchons d'abord les coordonnées du centre de gravité de l'élément M'N. Les droites MM' et NN' étant infiniment proches, nous regarderons le centre de gravité de l'élément comme situé au milieu de MM'; par conséquent l'ordonnée du centre de gravité de l'élément M'N sera

$$PM' + \tfrac{1}{2}\, MM' = y' + \tfrac{1}{2}(y - y') = \tfrac{1}{2}(y + y'),$$

et nous aurons pour le moment de l'élément par rapport à l'axe des x,

$$\tfrac{1}{2}(y + y')(y - y')\,dx = \tfrac{1}{2}(y^2 - y'^2)\,dx,$$

et pour le moment de l'élément par rapport à l'axe des y,

$$x(y - y')\,dx;$$

par conséquent si nous nommons $x_{,}$ et $y_{,}$ les coordonnées du centre de gravité, ces coordonnées seront déterminées par les équations

$$\lambda x_{,} = \int x(y - y')\,dx,$$
$$\lambda y_{,} = \int \tfrac{1}{2}(y^2 - y'^2)\,dx.$$

186. *Trouver le centre de gravité de la surface d'un solide de révolution.*

Fig. 90. Soit une surface engendrée par la rotation de BM (fig. 90) autour de l'axe des x : l'élément de cette surface ou la zone élémentaire décrite par Mm, aura pour expression $2\pi y ds$ (*Élémens de Calcul intégral*, art. 364); donc en appelant λ la surface entière, nous aurons, pour l'expression de cette surface,

$$\lambda = \int 2\pi y ds.$$

A l'égard des coordonnées $x_{,}$ et $y_{,}$ du centre de gravité, nous observerons d'abord que $y_{,}$ est nul, parce que le centre de gravité est sur l'axe des x; il ne s'agit donc plus que de déterminer la valeur de $x_{,}$. Pour cet effet, en prenant les momens par rapport à l'axe des y, celui du centre de gravité sera exprimé par $\lambda x_{,}$, et en l'égalant à la somme des momens des élémens, nous aurons

$$\lambda x_{,} = \int x \times 2\pi y ds;$$

d'où nous tirerons

$$x_{,} = \frac{\int 2\pi y x ds}{\lambda}:$$

mettant au lieu de ds et de λ leurs valeurs, et supprimant le facteur commun 2π, nous aurons pour déterminer l'abscisse du centre de gravité,

$$x_{,} = \frac{\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dy^2}} \ldots \;(101).$$

187. Pour donner une application de cette formule, cherchons le centre de gravité de l'aire de la calotte sphérique. Cette surface étant engendrée par la révolution de l'arc BC (fig. 91) autour de l'axe des x, il faudra éliminer l'une des variables de la formule, au moyen de l'équation du cercle, qui est Fig. 91.

$$y^2 = r^2 - x^2;$$

différentiant cette équation et élevant au carré le résultat, on obtient

$$dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2};$$

donc

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{rdx}{y}.$$

Cette valeur étant mise dans les intégrales de l'équation (101), on a

$$\int xy\sqrt{dx^2+dy^2} = \int rxdx = \tfrac{1}{2}rx^2 + C,$$
$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = \int rdx = rx + C'.$$

Prenant les intégrales définies entre les limites $x = AD = a$ et $x = AB = r$, on obtient

$$\int xy\sqrt{dx^2+dy^2} = \tfrac{1}{2}r(r^2 - a^2),$$
$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = r(r - a).$$

Ces valeurs transforment l'équation (101) en

$$x_{\prime} = \tfrac{1}{2}(r + a) = a + \tfrac{1}{2}(r - a);$$

donc le centre de gravité de la calotte sphérique est au milieu de la flèche DB.

188. *Trouver le centre de gravité d'un solide de révolution compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x.*

Le centre de gravité de ce solide (fig. 92) étant nécessaire- Fig. 92.

ment sur l'axe des x, le problème se réduit à trouver l'abscisse $x_{,}$ du centre de gravité du volume μ. L'élément de ce volume (*Élémens de Calcul intégral*, art. 369) étant $\pi y^2 dx$, nous aurons

$$\mu = \int \pi y^2 dx \ldots \quad (102).$$

Prenant ensuite les momens par rapport à l'axe des y, nous obtiendrons

$$\mu x_{,} = \int \pi x y^2 dx \ldots \quad (103);$$

divisant ces équations l'une par l'autre, et supprimant le facteur commun μ, il viendra

$$x_{,} = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx} \ldots \quad (104).$$

Si au moyen de l'équation de la courbe on élimine y, ces intégrales devront être prises entre les limites $x = AP$ et $x = AQ$.

189. Appliquons cette formule à la détermination du centre de gravité du cône : nous avons deux intégrales à obtenir, savoir,

$$\int y^2 dx \quad \text{et} \quad \int x y^2 dx\,;$$

éliminant y^2 au moyen de l'équation de la génératrice du cône qui est $y = ax$, nous obtiendrons en intégrant,

$$\int y^2 dx = \int a^2 x^2 dx = \frac{a^2 x^3}{3},$$

$$\int x y^2 dx = \int a^2 x^3 dx = \frac{a^2 x^4}{4}.$$

Nous n'ajoutons point de constantes, parce qu'à l'origine
Fig. 93. A (fig. 93) le volume est nul. Substituant ces valeurs dans la formule (104), on trouve

Fig. 93.

$$x_{,}=\frac{\frac{a^2x^4}{4}}{\frac{a^2x^3}{3}}=\frac{3}{4}x:$$

ce qui nous apprend que *le centre de gravité du cône est aux trois quarts de son axe Ax*.

190. Cherchons encore le volume du paraboloïde de révolution qui est le solide engendré par la révolution de l'arc de parabole AM (fig. 90) autour de l'axe Ax. L'équation de la courbe étant $y^2=px$, nous avons

$$\int y^2dx=\int pxdx=\tfrac{1}{2}px^2,$$
$$\int xy^2dx=\int px^2dx=\tfrac{1}{3}px^3.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (102), on a

$$x_{,}=\tfrac{2}{3}x.$$

On n'ajoute point de constante par la raison expliquée ci-dessus.

191. Prenons encore pour exemple l'ellipsoïde allongé de révolution : l'équation de la génératrice est

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);$$

mettant cette valeur de y^2 dans les intégrales de la formule (104), et observant que les constantes sont nulles, on a

$$\int y^2dx=\frac{b^2}{a^2}\int(a^2dx-x^2dx)=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right),$$
$$\int xy^2dx=\frac{b^2}{a^2}\int(a^2xdx-x^3dx)=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (104) devient

$$x_{,}=\frac{\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{4}x^3}{a^2-\frac{1}{3}x^2}=\frac{6a^2x-3x^3}{12a^2-4x^2};$$

et en prenant l'intégrale entre les limites $x=0$ et $x=a$, il suffit de faire $x=a$ dans la formule ci-derrière, et l'équation (104) donne pour l'abscisse du centre de gravité du demi-ellipsoïde allongé de révolution,

$$x_{,}=\frac{3}{8}a.$$

192. *Trouver le centre de gravité du volume engendré par*
Fig. 94. *la révolution de l'aire d'une courbe plane* BMCM' (fig. 94) *autour de l'axe des* x *situé hors de cette courbe.*

Soient $MP=y$ et $M'P=y'$; le volume engendré par l'élément $Mmm'M'$ sera censé égal à la différence des volumes engendrés par les rectangles Mp et $M'p$; les expressions de ces volumes étant respectivement πy^2dx et $\pi y'^2dx$, le volume engendré par $MM'm'm$ sera $\pi(y^2-y'^2)dx$; par conséquent en nommant μ le volume total, nous aurons

$$\mu=\pi\int(y^2-y'^2)\,dx:$$

prenant les momens par rapport à l'axe des y, il viendra

$$\mu x_{,}=\pi\int(y^2-y'^2)\,xdx.$$

On ne détermine pas $y_{,}$, parce que, ainsi que nous l'avons fait observer, le centre de gravité étant sur l'axe des x, il faut que $y_{,}$ soit nul.

De la méthode centrobarique, ou théorème de Guldin.

193. Soient $x_{,}$ et $y_{,}$ les coordonnées du centre de gravité
Fig. 95. d'une surface plane MPP'M' (fig. 95) dont l'aire est représentée par λ. Nous avons vu, art. 182, que le moment de l'élément de cette surface plane, par rapport à l'axe des x, était $\frac{1}{2}y\times ydx$, et qu'en égalant la somme des momens des élémens à celle du centre de gravité, on avait

$$\int\tfrac{1}{2}y^2dx=y_{,}\lambda.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par 2π, elle deviendra

$$\int \pi y^2 dx = 2\pi y_{,} \times \lambda;$$

l'expression $\int \pi y^2 dx$ est celle du volume engendré par la révolution de PP'M'M autour de l'axe des x, et $2\pi y_{,} \times \lambda$ est le produit du chemin décrit par le centre de gravité autour de l'axe des x par la surface génératrice PP'M'M; d'où l'on conclut ce théorème : *Un volume de révolution est égal à son aire génératrice multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité.*

194. Pour première application, cherchons le centre de gravité du corps engendré par la révolution du triangle isocèle ABC (fig. 96) autour de l'axe des x. Soient $CD = h$ et $AB = a$, l'aire génératrice sera exprimée par $\frac{1}{2} ah$. D'une autre part, le centre de gravité étant aux deux tiers de la droite DC, il aura pour ordonnée $\frac{2}{3} h$; par conséquent la circonférence décrite par $\frac{2}{3} h$ ou le chemin parcouru par le centre de gravité, sera $2\pi . \frac{2}{3} h$. Ce chemin étant multiplié par l'aire génératrice, nous trouverons que $\frac{2}{3} \pi h^2 a$ est l'expression du volume cherché. Fig. 96.

Pour seconde application, déterminons le volume du cône. La génératrice de ce solide de révolution étant le triangle rectangle ABC (fig. 97) qui fait une révolution autour de l'axe AB; cette génératrice aura pour expression $\frac{1}{2}$ AB $\times$ CB. Menons la droite CE sur le milieu du côté AB; le centre de gravité G de la génératrice sera au tiers de EC, article 172, et il aura pour ordonnée la perpendiculaire GD abaissée sur AB : la valeur de GD s'obtiendra par la proportion Fig. 97.

$$EC : EG :: CB : GD,$$

ou

$$3 : 1 :: CB : GD,$$

d'où l'on tirera

$$GD = \tfrac{1}{3} CB.$$

Le chemin décrit par le centre de gravité sera $\frac{2}{3}\pi$ CB; en multipliant cette expression par l'aire de la génératrice qui est, comme nous l'avons trouvée, $\frac{1}{2}$ AB $\times$ CB, on aura $\frac{1}{3}$ AB $\times \pi CB^2$ pour le volume du cône engendré par la révolution du triangle CAB autour de l'axe des x.

Fig. 98. 195. Pour troisième application, nous allons déterminer le volume du cylindre. L'ordonnée GE (fig. 98) du centre de gravité G étant égale à $\frac{1}{2}$ AC, le chemin décrit par le centre de gravité sera πAC. Multipliant cette expression par la génératrice qui équivaut à AB $\times$ AC, on aura $\pi AC^2 \times AB$ pour le volume du cylindre.

196. Une règle analogue à la précédente peut nous servir à déterminer l'expression d'une surface de révolution. En effet, considérons une surface engendrée par la révolution de l'arc
Fig. 99. MN (fig. 99) autour de l'axe des abscisses, et appelons $y_{,}$ l'ordonnée du centre de gravité G de l'arc générateur, en prenant par rapport à l'axe des x la somme des momens des arcs élémentaires, et l'égalant à celui du centre de gravité, nous aurons, art. 178,

$$\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = y_{,} \times \text{arc MN}\ldots \quad (105);$$

multipliant les deux membres de cette équation par 2π, on la changera en celle-ci,

$$\int 2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi y_{,} \times \text{arc MN};$$

l'expression $\int 2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ étant celle qui est connue dans le Calcul intégral pour représenter une surface de révolution, nous pouvons en conclure ce théorème : *Une surface de révolution est égale au produit de l'arc générateur par la circonférence que dans son mouvement décrit le centre de gravité.*

197. Par exemple, pour avoir la surface convexe du cône

tronqué engendré par la révolution de CD (fig. 100) autour de l'axe des x, le centre de gravité de la génératrice CD étant au milieu G de cette droite, l'ordonnée EG du centre de gravité a pour expression $\frac{AC + DB}{2}$; donc Fig. 100.

$2\pi \times \frac{AC + CB}{2}$ est le chemin décrit par le centre de gravité. Cette expression multipliée par la génératrice CD, donne $2\pi \frac{AC + CB}{2} \times CD = 2\pi\, GE \times CD$ pour la surface convexe du cône.

198. Les deux théorèmes précédens peuvent être compris dans ce seul énoncé : *Le volume ou la surface de révolution que l'on cherche, équivaut au produit de la génératrice par le chemin que décrit le centre de gravité.*

Des Machines.

199. Les machines servent à transmettre l'action des forces, en les faisant agir dans un sens qui n'est pas celui de leur direction. La puissance est la force qui est appliquée à la machine, et la résistance est le corps que cette puissance doit mettre en équilibre.

Les machines les plus simples sont au nombre de sept, savoir : les cordes, le levier, la poulie, le tour, le plan incliné, la vis et le coin.

Des cordes.

200. Nous commencerons par adopter l'hypothèse que les cordes réduites à leurs axes, aient une flexibilité parfaite, et soient inextensibles et dénuées de pesanteur. Une corde sollicitée par deux forces P et Q (fig. 101) qui la tendent, ne peut être Fig. 101.
considérée comme une machine, puisqu'elle ne change ni la direction de P ni celle Q. Il est facile de démontrer que lorsque

ces forces sont égales, la tension de la corde est mesurée par l'une d'elles; car l'équilibre subsistant, on peut regarder A, milieu de PQ, comme un point fixe, et effacer la ligne qui s'étend de A vers Q; alors la force P agissant seule sur A, mesurera la tension de la corde.

201. Lorsque Q surpasse P, une partie de Q égale à P est donc employée à tendre la corde, et l'excès de Q sur P l'entraînera dans le sens de P vers Q; donc la tension sera mesurée par la plus petite des forces.

202. Les conditions d'équilibre qui existent entre trois cordes assujéties par un nœud, sont les mêmes que celles qui existent entre trois forces qui sollicitent un point matériel. Il faut que l'une de ces forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres, ce qui entraîne la condition qu'elles soient dans un même plan; alors il y aura équilibre si Fig. 102. l'on a (fig. 102)

$$P : Q : R :: \sin p : \sin q : \sin r.$$

203. Cette proportion ne suffit pas si les cordes sont réunies Fig. 103. par un nœud coulant. En effet, en regardant P et R (fig. 103) comme des points fixes, si la force Q, au moyen d'un nœud coulant, tire la corde PCR, le point C décrira une ellipse; et comme le plan de cette ellipse n'est assujéti qu'à passer par les points P et R, il doit décrire en tournant autour de PR, un ellipsoïde qui aura pour grand axe PC + CR. Le point C sera toujours situé sur cet ellipsoïde, ou, ce qui revient au même, sur l'arc d'une ellipse mobile autour de PR : or ce point ne pouvant se mouvoir que lorsque la force Q a une composante suivant l'élément de l'arc elliptique, il en résulte que si la direction de Q est normale à l'ellipse, cette force sera détruite par la résistance de la courbe, et le point C sera en équilibre. Cherchons donc la condition nécessaire pour que la force Q soit normale à l'ellipse. Pour cela, menons à la courbe la tan-

gente Tt, nous aurons par la propriété de l'ellipse (*Théorie des Courbes du second ordre*, page 166),

$$TCP = RCt;$$

si l'on retranche ces angles des angles droits TCN, tCN, il restera

$$PCN = NCR;$$

donc l'angle PCR doit être partagé en deux parties égales par la direction de Q, et la proportion

$$P : R :: \sin NCR : \sin PCN$$

devient alors

$$P : R :: \sin NCR : \sin NCR,$$

ce qui montre que les forces P et R sont égales.

204. Une machine funiculaire est un système de cordes qui se font équilibre à l'aide de plusieurs nœuds.

205. Lorsque les forces P, R, S, T, etc. (fig. 104) sont Fig. 104. réunies par un même nœud, si l'on substitue aux forces P et R leur résultante R', le système contiendra une force de moins. En répétant un certain nombre de fois cette opération, on parviendra toujours à réduire le système à celui de trois forces réunies par un seul nœud.

206. Considérons maintenant plusieurs forces P, P', P'', P''', P^{iv}, etc. (fig. 105) réunies trois à trois par des nœuds fixes Fig. 105. A, B, C, etc., on peut ramener l'équilibre de ces forces à celui d'un système assujéti autour d'un seul point; car soit R la résultante des forces P et P'; comme elle doit être détruite par la troisième force qui agit suivant AB, il faudra que cette résultante se trouve sur le prolongement de AB : or une force pouvant être appliquée à tout point pris sur sa direction, on aura la faculté de transporter R au point B; alors on pourra décomposer R en deux forces égales et parallèles à P et à P', et

l'effet sera le même que si les forces P et P′ eussent reculé parallèlement à elles-mêmes pour s'appliquer au point B. Transportant de la même manière les forces P, P′, P″ qui sont censées appliquées en B au point C, toutes les forces pourront être considérées comme appliquées à ce point. Les conditions de leur équilibre seront donc

$$\Sigma P \cos \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma P \cos 6 = 0.$$

Pour avoir le rapport des tensions extrêmes P et P^{IV}, soient t et t' les tensions exercées suivant AB et BC, et nommons

a l'angle PAP′, a' l'angle ABP″, a'' l'angle BCP‴,
b l'angle P′AB, b' l'angle P″BC, b'' l'angle P‴CP^{IV},

nous aurons, art. 71,

$$\begin{aligned} P &: t :: \sin b : \sin a, \\ t &: t' :: \sin b' : \sin a', \\ t' &: P^{\text{IV}} :: \sin b'' : \sin a''; \end{aligned}$$

multipliant ces proportions par ordre, et supprimant les termes communs, on obtiendra

$$P : P^{\text{IV}} :: \sin b \sin b' \sin b'' : \sin a \sin a' \sin a'';$$

on pourrait de même trouver le rapport de deux autres forces.

207. Si les forces P′, P″, P‴, etc., sont parallèles, on a dans ce cas,

$$b + a' = 2, \qquad b' + a'' = 2;$$

et comme les angles supplémens l'un de l'autre ont les mêmes sinus, il faut que l'on ait

$$\sin b = \sin a', \qquad \sin b' = \sin a'',$$

et la proportion précédente se réduit à

$$P : P^{\text{IV}} :: \sin b'' : \sin a.$$

Lorsque P′, P″ et P‴ sont des poids (fig. 106) les forces se trouvent dans un même plan vertical ; car la droite AP′ étant verticale, le plan des forces P, P′ et t est vertical. De même le plan des forces t, P″ et t' sera vertical : or t ne peut être à la fois dans deux plans verticaux sans que ces plans ne se confondent. Fig. 106.

208. Les forces extrêmes P et P^{iv} devant contre-balancer la résultante de toutes les autres, il faudra que cette résultante soit directement opposée à celle de P et de P^{iv}, et par conséquent passe par le point de concours G de ces deux forces. Ayant ainsi déterminé un point de la résultante de toutes les forces du système, comme cette résultante doit être verticale, puisqu'elle est parallèle aux forces P′, P″, P‴, il suffira, pour en déterminer la direction, de mener par le point G la verticale GH.

209. Une corde pesante pouvant être considérée comme un polygone funiculaire chargé d'une infinité de petits poids, il résulte de ce qui précède que si l'on veut avoir égard au poids de la corde, il faut mener (fig. 107) les deux tangentes PG et QG, et appliquer en G un poids égal à celui de la corde ; alors en représentant par G le poids de cette corde, nous aurons Fig. 107.

$$P : Q : G :: \sin LGQ : \sin LGP : \sin PGQ.$$

De la Chaînette.

210. La chaînette est la courbe formée par une corde parfaitement flexible qui, suspendue à deux points fixes A et B (fig. 108), est abandonnée entièrement à l'action de la pesanteur. Nous supposerons cette corde uniformément pesante, surchargée d'une infinité de poids, et nous reconnaîtrons, comme dans l'art. 207, qu'elle doit être comprise dans un plan vertical. Cela posé, plaçons l'origine des coordonnées en A, et prenons pour axe des x la ligne horizontale AC, renfermée dans le plan de la courbe. Alors, si AP $= x$ est l'abscisse d'un point quelconque M, l'ordonnée y de ce point sera la verticale PM. Par le même point M, et par l'origine A, menons ensuite les deux tangentes AH, HM, qui se Fig. 108.

rencontrent en H; et enfin, par le point H, élevons la verticale HL. Nous avons déjà vu, art. 209, que si nous supposons que le poids de la corde soit appliqué au point H, on doit avoir la proportion

tension en A : poids de la portion de corde AM :: sin LHM : sin AHM... (106);

nommons s l'arc AM, A la tension en A, laquelle agit suivant la tangente AH, et désignons par α l'angle que cette tangente fait avec l'horizontale AC. Ces deux quantités A et α sont des constantes que nous apprendrons bientôt à déterminer.

Pour le moment, il nous suffit de remarquer que la tension A étant de même nature que le second terme de notre proportion, doit être exprimée par un poids, autrement il n'y aurait pas homogénéité entre les deux derniers termes de notre proportion. Or, si nous représentons par p l'unité de poids, la tension A sera de la forme ap, et le poids de la corde AM aura pour expression sp; par conséquent, les deux premiers termes de notre proportion seront remplacés par ce rapport $ap : sp$, ou plutôt par $a : s$, en supprimant le facteur commun; alors elle deviendra

$$a : s :: \sin LHM : \sin AHM \ldots (107).$$

211. Déterminons maintenant les expressions analytiques des sinus qui entrent dans cette proportion. Pour cela, remarquons d'abord que le triangle élémentaire mMn formé par une parallèle à l'axe des x, pouvant être regardé comme rectiligne, on a

$$mM \sin mMn = mn, \quad mM \cos mMn = Mn,$$

ou, en divisant par mM,

$$\sin mMn = \frac{mn}{mM}, \quad \cos mMn = \frac{Mn}{mM};$$

remplaçant les lignes élémentaires par leurs valeurs analytiques, ces équations deviennent

$$\sin mMn = \frac{dx}{ds}, \quad \cos mMn = \frac{dy}{ds} \ldots (108).$$

Or l'angle mMn étant compris entre l'élément de la courbe et la verticale MP, comme cet élément se confond avec la tangente MK, il en résulte que la même tangente fera avec HL parallèle à MP, un angle LHK qui sera égal à mMn; mettant donc cet angle à la place de l'autre, dans les équations (108), on aura

$$\sin LHK = \frac{dx}{ds}, \quad \cos LHK = \frac{dy}{ds} \ldots (109).$$

La première de ces équations revient à

$$\sin \text{LHM} = \frac{dx}{ds} \ldots (110),$$

car les angles LHK et LHM étant supplémens l'un de l'autre, on a

$$\sin \text{LHM} = \sin \text{LHK}.$$

D'un autre côté, les angles AHM et AHK étant aussi supplémens l'un de l'autre, on a encore

$$\sin \text{AHM} = \sin \text{AHK} = \sin (\text{LHK} - \text{LHA}),$$

ou plutôt, d'après la formule connue de Trigonométrie,

$$\sin \text{AHM} = \sin \text{LHK} \cos \text{LHA} - \sin \text{LHA} \cos \text{LHK};$$

éliminant sin LHK et cos LHK à l'aide des équations (109), on aura

$$\sin \text{AHM} = \frac{dx}{ds} \cos \text{LHA} - \frac{dy}{ds} \sin \text{LHA} \ldots (111).$$

A l'égard du sinus et du cosinus de l'angle LHA, le triangle ALH, qui est rectangle en L, nous montre que l'angle LHA est complément de l'angle HAL, et que par conséquent le sinus de l'un de ces angles est le cosinus de l'autre. Ayant désigné HAL par α, nous aurons donc

$$\cos \text{LHA} = \sin \alpha, \quad \text{et} \quad \sin \text{LHA} = \cos \alpha.$$

212. Substituant ces valeurs dans l'équation (111), elle deviendra

$$\sin \text{AHM} = \frac{dx}{ds} \sin \alpha - \frac{dy}{ds} \cos \alpha \ldots (112).$$

Enfin les équations (110) et (112), convertiront la proportion (107), en

$$a : s :: \frac{dx}{ds} : \frac{dx}{ds} \sin \alpha - \frac{dy}{ds} \cos \alpha.$$

On tire de cette proportion

$$s = a \sin \alpha - a \frac{dy}{dx} \cos \alpha \ldots (113);$$

et comme nous avons trois variables, nous en éliminerons une, en substituant cette valeur de s dans la formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Pour cela, nous différentierons l'équation (113), ce qui nous donnera

$$ds = -a \cos \alpha \frac{d^2y}{dx},$$

comparant ces valeurs de ds et divisant par dx, on obtiendra

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=-a\cos\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2};$$

divisant ensuite par le radical, il viendra

$$1=-a\cos\alpha\,\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par dy, pour que le numérateur de la fraction puisse devenir la différentielle de la quantité qui est sous le radical, nous obtiendrons

$$dy=-a\cos\alpha.\frac{2dy\,\frac{d^2y}{dx^2}}{2\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}},\quad\text{ou}\quad\frac{-a\cos\alpha}{2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{2}}2dy\,\frac{d^2y}{dx^2};$$

par conséquent, en intégrant (*Élémens de Calcul intégral*, art. 270), nous trouverons

$$y=-a\cos\alpha\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+c.$$

Cette équation étant multipliée par dx, nous donne

$$(c-y)\,dx=a\cos\alpha\sqrt{dx^2+dy^2};$$

Élevant les deux membres au carré, rassemblant les termes en dx^2, et tirant de nouveau la racine carrée, on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(c-y)^2-a^2\cos^2\alpha}}{a\cos\alpha}\ldots\ (114).$$

213. Pour déterminer la constante, remarquons qu'au point A,

$$x=0,\quad y=0,\quad\text{et}\quad\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\alpha;$$

ces dernières valeurs réduisent l'équation (114) à

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sqrt{c^2-a^2\cos^2\alpha}}{a\cos\alpha},$$

d'où l'on tire

$$a\operatorname{tang}\alpha\cos\alpha=\sqrt{c^2-a^2\cos^2\alpha};$$

mais

$$\operatorname{tang}\alpha\cos\alpha=\sin\alpha;$$

donc en élevant au carré, on a

$$a^2 \sin^2 \alpha = c^2 - a^2 \cos^2 \alpha,$$

et par conséquent

$$c^2 = a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha);$$

et, comme la quantité renfermée entre les parenthèses est égale à l'unité, l'équation précédente se réduit à $c^2 = a^2$. N'ayant aucun égard aux signes parce que nous n'avons employé a, dans la proportion 107, que d'une manière absolue, nous substituerons a, à la place de c, dans l'équation (114), et nous aurons enfin, pour l'équation différentielle de la chaînette,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(a+y)^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a \cos \alpha} \ldots \; (115).$$

214. Cette équation différentielle nous conduit facilement à reconnaître que la chaînette est une courbe rectifiable ; car si, par son moyen, on élimine la valeur de $\frac{dy}{dx}$ de l'équation (113), on trouve

$$s = a \sin \alpha - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos^2 \alpha} \ldots \; (116),$$

équation qui, pour une valeur donnée de y, fera connaître celle de l'arc s, lorsque nous aurons déterminé a et α.

215. Occupons-nous maintenant de l'intégration de l'équation de la chaînette. Pour parvenir à ce but, commençons d'abord à la simplifier en faisant

$$a - y = z, \quad a \cos \alpha = b \ldots \; (117);$$

on aura donc

$$dy = - dz;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (115) de la chaînette, on obtiendra

$$dx = - \frac{bdz}{\sqrt{z^2 - b^2}} \ldots \; (118).$$

On parviendra à intégrer cette équation en employant le procédé suivant (*Élémens de Calcul intégral*, art. 316) : on fera

$$\sqrt{z^2 - b^2} = z - t \ldots \; (119);$$

élevant au carré et réduisant, on obtiendra

$$2zt = b^2 + t^2.$$

Cette équation étant différentiée et divisée ensuite par 2, nous donne

$$zdt + tdz = tdt;$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds}{s-t} = -\frac{dt}{t}.$$

Or, en vertu de l'équation (119), $s-t$ n'étant autre chose que le radical, ce dernier résultat convertit l'équation (118) en

$$dx = \frac{bdt}{t},$$

et donne, en intégrant,

$$x = b \log t + e;$$

mettant, au moyen de l'équation (119), la valeur de t en s, on obtient

$$x = b \log (s - \sqrt{s^2 - b^2}) + e;$$

remplaçant ensuite b et s par leurs valeurs tirées des équations (117), on a enfin

$$x = a \cos \alpha \log [(a-y) - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos^2 \alpha}] + e \ldots \quad (120).$$

216. Pour déterminer la constante e, remarquons qu'au point A l'hypothèse de $x=0$ et de $y=e$, nous fait déduire de l'équation (120)

$$e = -a \cos \alpha \log [a(1 - \sqrt{1-\cos^2 \alpha})];$$

au moyen de cette valeur de e, l'équation (120) devient

$$x = a\cos\alpha \left\{ \log [(a-y) - \sqrt{(a-y)^2 - a^2\cos^2\alpha}] - \log a(1 - \sqrt{1-\cos^2\alpha}) \right\};$$

ou, par la propriété du logarithme qui permet de remplacer une différence par un quotient,

$$x = a \cos \alpha \log \left[\frac{(a-y) - \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a(1 - \sqrt{1-\cos^2 \alpha})} \right] \ldots \quad (121).$$

Telle est l'équation de la chaînette.

217. Nous venons de reconnaître dans les constantes c et e des fonctions des quantités a et α; mais jusqu'à présent ces quantités ne sont encore représentées que par des signes généraux. Pour les déterminer, il faut que l'on nous donne les coordonnées du second point de suspension : soient donc $AD = x'$, et $DB = y'$ ces coordonnées, et l la longueur de la corde AMB; en substituant ces valeurs dans les équations (116) et (121), nous obtiendrons

$$l = a \sin \alpha - \sqrt{(a-y')^2 - a^2 \cos^2 \alpha},$$

$$x' = a \cos \alpha \log \left[\frac{(a-y') - \sqrt{(a-y')^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a(1 - \sqrt{1-\cos^2 \alpha})} \right].$$

218. Ces équations et celle-ci,

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

détermineront les quantités a, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, en fonction de x' et de y'. Mais il se présente encore une difficulté : c'est de savoir comment on doit être dirigé dans le choix des signes qui conviennent aux cosinus, et même dans celui des radicaux que nous n'avons jamais affectés du double signe. Pour cela, en déterminant les coordonnées du point auquel appartient la plus grande ordonnée, par la méthode qui est prescrite dans le paragraphe des *maxima* et *minima* de mes *Élémens de Calcul différentiel*, on doit égaler à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$; ce qui réduira l'équation (115) à

$$\frac{\sqrt{(a-y)^2 - a^2\cos^2\alpha}}{a\cos\alpha} = 0,$$

et par conséquent donnera

$$a - y = a\cos\alpha \ldots \quad (122).$$

Pour s'assurer maintenant que cette ordonnée appartient à un maximum plutôt qu'à un minimum, nous chercherons, suivant la règle usitée, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif ou positif; et, comme la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que nous donne l'équation (115) est affectée d'un radical, nous nous en débarrasserons en élevant cette équation au carré, ce qui nous donnera

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(a-y)^2 - a^2\cos^2\alpha}{a^2\cos^2\alpha};$$

différentiant, et divisant ensuite par $2dy$, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(a-y)}{a^2\cos^2\alpha};$$

mettant dans cette équation la valeur de $a-y$, que l'équation (122) détermine pour notre hypothèse, nous obtiendrons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\cos\alpha}.$$

219. Cette équation prescrit pour condition du maximum, que a et $\cos\alpha$ soient de mêmes signes; or, ces signes doivent être positifs, car, s'ils étaient négatifs, la valeur de y déterminée par l'équation (122) serait négative, ce qui est inadmissible dans l'hypothèse actuelle des y positifs, situés au-dessous de l'axe horizontal AC. L'équation (122) nous montre encore que la valeur de y, qui appartient à un maximum, doit être moindre que a, et qu'à plus forte raison, il en est de même de toute autre valeur de y. Représentons par EF (fig. 108) l'ordonnée du maxi- Fig. 108.

mum, on voit que depuis $x=0$ jusqu'à $x=AE$, y augmentant, l'arc augmente aussi. Or, l'équation (116) nous prouve que cet accroissement de y ne peut nécessiter celui de l'arc, à moins que le radical, comme cela a lieu dans la formule (116), ne soit affecté du signe négatif. En effet, en jetant les yeux sur cette formule, on voit que plus y augmente plus $a-y$ est petit, et que plus par conséquent le radical exprime une petite quantité; mais plus le radical est petit, moins il diminue la partie positive $a \sin \alpha$; et plus alors l'arc devient grand : l'équation (116) s'accorde donc parfaitement avec l'hypothèse d'un arc s dans lequel y n'a pas encore atteint à son maximum. Mais, depuis $x=AE$ jusqu'à $x=AD$, l'arc s doit augmenter quand y diminue, ce qui ne peut être que lorsque cette valeur décroissante de y fait augmenter le radical; donc le radical doit être positif depuis $x=AE$ jusqu'à $x=AD$, et par conséquent changer de signe dans la formule (116).

Du Levier.

220. Le levier est une pièce oblongue de bois ou de métal qui se meut autour d'un point fixe qu'on appelle *le point d'appui*. Pour plus de simplicité, nous regarderons le levier comme sans épaisseur; alors il pourra être représenté par une

Fig. 109. ligne droite ou courbe. Soit donc un levier AB (fig. 109) qui est sollicité par deux forces P et P'; ces forces ne peuvent être détruites par un point fixe C, à moins qu'elles ne soient dans le même plan avec le point C. Lorsque cela aura lieu, il suffira, pour qu'il y ait équilibre, que la somme des momens par rapport à C, soit égale à zéro.

221. Si le levier était dans le cas de glisser sur son point d'appui, pour que l'équilibre fût possible, il faudrait en outre que la résultante de la charge du point d'appui fût perpendiculaire à la surface du levier en C.

Fig. 111. 222. Lorsque le levier est en ligne droite (fig. 111) et que les forces sont parallèles, en nommant p et p' les parties AC et BC, la théorie des forces parallèles nous donne, art. 73,

$$P : P' :: p' : p;$$

ce qui nous montre que pour qu'il y ait équilibre, les forces doivent être en raison inverse des bras de levier.

223. Si le levier est courbe et que l'on mène une droite ED (fig. 110) par le point C, on peut concevoir ces forces appliquées aux points E et D qui sont sur leurs directions; alors on a Fig. 110.

$$P : P' :: CD : CE.$$

224. On distingue des leviers de trois genres. Dans le levier du premier genre, le point d'appui C (fig. 111) est entre la puissance P et la résistance R; dans le levier du second genre, la résistance R (fig. 112) est entre la puissance P et le point d'appui C; dans le levier du troisième genre, la puissance (fig. 113) est entre la résistance et le point d'appui. Fig. 111. Fig. 112. Fig. 113.

Les balances, les romaines sont des leviers du premier genre; les barres de fer employées à soulever les fardeaux, sont des leviers du second genre; les marches de certains rouets, celles des métiers de tisserand sont des leviers du troisième genre.

225. On peut avoir égard au poids du levier en le considérant comme une force S appliquée au centre de gravité. Par exemple, soient P et P' (fig. 114) deux poids suspendus aux extrémités du levier AB, et G son centre de gravité; on aura, en vertu de l'équation des momens, Fig. 114.

$$P' \times CB + S \times CG = P \times AC.$$

Cette équation détermine P ou P'; et la charge du point d'appui sera

$$P + P' + S.$$

Si la puissance P' était dirigée en sens contraire de la résistance, il faudrait avoir égard aux sens dans lesquels les forces tendent à faire tourner le levier, et l'équation des momens serait (fig. 115) Fig. 115.

$$CA \times P + CG \times S = CB \times P' \ldots \quad (123),$$

et l'on aurait pour la charge du point d'appui (*note huitième*),

$$P + S - P'.$$

Fig. 115. 226. Supposons que le levier CB (fig. 115) soit homogène et partout de même épaisseur; représentons par m le poids d'une portion de ce levier dont la longueur soit d'un centimètre, celle du levier étant x, son poids S sera mx, et devra être considéré comme concentré au milieu G du levier; de sorte qu'en nommant CA, a, l'équation (123) deviendra

$$aP + \tfrac{1}{2}x \times mx = P'x.$$

On tire de cette équation

$$P' = \frac{aP}{x} + \tfrac{1}{2}mx \ldots \quad (124).$$

Ainsi ayant pris arbitrairement x, cette formule donnera la valeur de P'; mais si l'on demande quelle est parmi toutes ces valeurs de x, celle qui doit avoir lieu pour que la puissance P' soit aussi petite qu'il est possible, il faudra regarder P' comme une fonction de x, et, suivant la méthode des *maxima* et *minima*, égaler à zéro la valeur de $\frac{dP'}{dx}$, ce qui donnera

$$\frac{dP'}{dx} = -\frac{aP}{x^2} + \tfrac{1}{2}m = 0;$$

d'où l'on tire

$$x^2 = \frac{2aP}{m} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{2aP}{m}}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (123), on obtient

$$P' = \frac{aP}{\sqrt{\frac{2aP}{m}}} + \tfrac{1}{2}m\sqrt{\frac{2aP}{m}}:$$

réduisant le second membre au même dénominateur, il vient

$$P' = \frac{2aP}{\sqrt{\frac{2aP}{m}}} = \sqrt{2aPm}.$$

De la Poulie et des Moufles.

227. Une poulie est une roue dont la circonférence, qui est creuse, se trouve en partie enveloppée d'une corde; cette corde, par son mouvement, fait tourner la poulie autour d'un axe qui passe par son centre, et qui est supporté par une barre de fer recourbée OB (fig. 116), à laquelle on a donné Fig. 116.
le nom de *chape*.

On distingue deux sortes de poulies: la poulie fixe et la poulie mobile. La poulie fixe est celle dans laquelle la chape OB (fig. 116) est retenue par un point fixe, et la poulie mo- Fig. 116.
bile est celle dans laquelle la résistance R (fig. 117) est atta- Fig. 117.
chée à la chape.

228. Dans la poulie fixe (fig. 116), la puissance P et la ré- Fig. 116.
sistance Q ne peuvent se faire équilibre que lorsqu'elles sont égales; car si ces forces différaient d'intensité, la plus grande entraînerait l'autre.

Pour le démontrer analytiquement, prolongeons jusqu'en E les directions de P et de Q qui agissent tangentiellement, ce point E appartiendra à la résultante des forces P et Q; mais cette résultante devant être détruite par le centre O de la poulie, doit passer par ce point : or, à cause des triangles égaux EPO, EQO, l'angle PEQ est partagé en deux parties égales par la résultante; d'où il suit que l'intensité de P est la même que celle de Q.

229. Prenons maintenant les parties égales Eg et Eh, et construisons le parallélogramme Egfh; les forces P et Q seront représentées par les droites Eg et Eh, et la résultante de ces forces le sera par la diagonale Ef; de sorte que nous aurons

$$Eg : Eh : Ef :: P : Q : R;$$

et comme les triangles Egf, POQ sont semblables, parce qu'ils

ont leurs côtés perpendiculaires, on peut établir la proportion

$$Eg : Eh : Ef :: PO : OQ : PQ;$$

donc

$$PO : OQ : PQ :: P : Q : R;$$

d'où l'on peut conclure que dans la poulie fixe, l'une des forces est à la résultante comme le rayon de la poulie est à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.

On a démontré que les forces P et Q étaient égales; il suit de là que la poulie fixe n'a d'autre effet que de changer la direction d'une force sans augmenter ni diminuer son intensité.

230. Considérons maintenant la poulie mobile. Soit une corde QABP (fig. 117) qui étant attachée au point fixe Q, embrasse l'arc AB de la poulie, et qui, lorsqu'elle est sollicitée par la puissance P, fait monter la résistance R.

C tendant à entraîner Q, réciproquement Q agit sur C. Si l'on considère donc Q comme une force qui sollicite le point C, on cherchera les conditions d'équilibre entre P, Q et R; ces conditions sont les mêmes que celles que nous avons établies pour la poulie fixe, si ce n'est que la résistance, au lieu d'être Q, est ici R. Ainsi le rapport de la puissance à la résistance nous sera donné par la proportion

$$P : R :: \textit{rayon} : \textit{soutendante de l'arc } AB.$$

La puissance étant moindre que la résistance, la poulie mobile est avantageuse à la puissance.

Si les cordons deviennent parallèles, la proportion précédente devient

$$P : R :: \textit{rayon} : \textit{diamètre} :: 1 : 2;$$

dans ce cas, la puissance est la moitié de la résistance.

Si la soutendante est égale au rayon, la puissance est égale à la résistance; par conséquent lorsque la soutendante est plus petite que le rayon, la poulie mobile devient désavantageuse.

231. Par la combinaison de plusieurs poulies, on peut soulever des poids énormes avec une très petite puissance, comme on peut le voir, en disposant les poulies de la manière suivante.

Le poids R (fig. 118) étant suspendu à la chape de la poulie ABD, cette poulie sera embrassée par une corde d'une part attachée au point fixe K, et de l'autre à la chape de la poulie A'B'D'. Cette seconde poulie sera également supportée par une corde, d'une part attachée en K', et de l'autre à la chape de la poulie A"B"D"; ainsi de suite jusqu'à la dernière poulie qui sera embrassée par une corde attachée d'un côté à un point fixe, et de l'autre à la puissance P. Fig.

Si l'équilibre subsiste entre ces poulies, et qu'on appelle T, T', T", etc., les tensions des cordons AE, A'E', etc., on aura, en ne supposant que trois poulies,

$$R : T :: AB : AC,$$
$$T : T' :: A'B' : A'C',$$
$$T' : P :: A''B'' : A''C''.$$

Ces proportions multipliées par ordre donnent

$$R : P :: AB \times A'B' \times A''B'' : AC \times A'C' \times A''C'';$$

ce qui nous apprend que la puissance est à la résistance R comme le produit des rayons des poulies est à celui de leurs soutendantes. Si les cordons sont parallèles, les soutendantes deviennent des diamètres, et l'on a

$$R : P :: 2^3 : 1,$$

et en général pour n poulies,

$$R : P :: 2^n : 1.$$

232. Cette disposition est peu employée, parce qu'elle demande un trop grand emplacement. En effet, lorsque le centre de la poulie BOC (fig. 119) s'élève d'un nombre h de pieds, Fig. 116.

BC vient en bc, et la corde DCBX s'accourcit de $Cc + Bb$, c'est-à-dire de $2h$ de pieds ; par conséquent la poulie E doit s'élever d'autant au-dessus de X : or par un même raisonnement, on démontrera que quand la poulie E s'élève de $2h$ de pieds, la troisième poulie doit s'élever de $4h$; et ainsi de suite. De sorte qu'avec un nombre n de poulies, la puissance doit s'élever de $2^{n-1}h$; car la puissance tient la place d'une poulie : on perd donc en espace ce qu'on gagne en puissance.

A l'égard des pressions que supportent les points D, D', D'', etc., appelons-les Q, Q', Q'', etc., et nommons S et X les tensions des cordons SA et XB, et supposons que les rayons des poulies soient égaux, nous aurons

$$P = Q, \quad S = Q', \quad X = Q'';$$

substituant ces valeurs dans les proportions

$$P : S :: 1 : 2,$$
$$S : X :: 1 : 2,$$

on obtient

$$Q' = 2P, \quad Q'' = 4P;$$

la pression totale sera donc exprimée par

$$P + 2P + 4P = 7P.$$

233. Le moufle est une machine composée de plusieurs poulies disposées sur une même chape.

Pour trouver le rapport de la puissance P à la résistance R
Fig. 120. dans le moufle de la figure 120, nous observerons que les cordons sont tous également tendus ; la somme de ces tensions fait équilibre à la résistance R, qui peut être considérée comme entraînée par six forces parallèles égales ; la tension de Q est donc mesurée par l'une de ces forces, et par conséquent est la sixième partie de la résistance.

Du Tour ou Treuil.

234. Le tour est un cylindre qui sert d'essieu à une roue. A la circonférence de cette roue est attachée une corde qui, en se déroulant, lui imprime un mouvement de rotation dont l'effet se communique au cylindre; alors une seconde corde s'enveloppe autour de ce cylindre, et fait monter la résistance dont elle est chargée. Deux pivots cylindriques A et B (fig. 121) se trouvent aux extrémités A et B du cylindre; ces pivots se nomment *tourillons*. Comme ils sont de moindres diamètres que le cylindre, ils servent à le faire tourner avec plus de facilité sur ses appuis. Fig. 121.

235. Nous allons d'abord chercher le rapport de la puissance à la résistance dans cette machine. Pour cela, plaçons l'axe AB du cylindre dans une position horizontale; nous pourrons supposer qu'un plan horizontal mené par cet axe coupe le cylindre, et, en se prolongeant indéfiniment, vienne rencontrer au point F la direction de la puissance.

Représentons cette puissance P par la partie FP de sa direction, et décomposons P en deux forces $FL = P'$ et $FK = P''$, l'une horizontale et l'autre verticale.

Cela posé, lorsque P fait mouvoir la roue, la composante P'' qui est verticale, descend, et le poids R monte, tandis que le point M reste immobile, parce qu'il est sur l'axe du cylindre. On peut donc regarder M comme le point d'appui d'un levier HF, auquel seraient appliquées les forces R et P''; par conséquent on aura, en vertu de l'équilibre du levier,

$$P'' : R :: MH : MF.$$

D'une autre part, le plan de la roue et la section OEH étant perpendiculaires à l'axe du cylindre, les triangles HIM, MCF sont rectangles, l'un en I et l'autre en C, et donnent

$$MH : MF :: HI : CF.$$

On tire de ces proportions,

$$P'' : R :: HI : CF.$$

Fig. 121 et 122. Soit ϕ l'angle FPK, on a (fig. 121 et 122)

$$FPK = DFC = \phi,$$

par conséquent

$$FK = FP \sin \phi, \quad DC = CF \sin \phi,$$

ou

$$P'' = P \sin \phi, \quad CF = \frac{DC}{\sin \phi};$$

substituant ces valeurs dans la proportion précédente, on obtient

$$P \sin \phi : R :: HI : \frac{DC}{\sin \phi};$$

d'où l'on tire

$$P \times DC = R \times HI;$$

ce qui nous donne cette proportion

$$P : R :: HI : DC \ldots (125).$$

On voit donc que dans le tour, *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est à celui de la roue.*

236. Évaluons maintenant la pression que les tourillons A et B (fig. 121) font supporter à leurs points d'appui. Trois objets contribuent à exercer cette pression, savoir : la puissance, la résistance et le poids de la machine. Si nous nommons T ce poids, et G le centre de gravité de la machine, nous pourrons regarder T comme suspendu en G : or, à cause de la symétrie de la machine, G se trouvera sur l'axe même du cylindre. Cela posé, remplaçons la puissance P par ses composantes P′ et P″ ; il ne s'agira plus que de décomposer les quatre forces R, P′, P″ et T en deux autres qui agissent sur les points d'appui A et B.

Les forces R et T ayant été déterminées par expérience, cherchons d'abord à exprimer P′ et P″ en fonction de R. Pour cela nous avons (fig. 121 et 122) Fig. 121 et 122.

$$P' = FL = P \cos FPK, \quad P'' = FK = P \sin FPK,$$

ou

$$P' = P \cos \phi, \quad P'' = P \sin \phi \ldots \ (126).$$

Mais l'angle ϕ étant égal à l'angle CFD, on a

$$1 : \cos \phi :: CF : DF, \quad 1 : \sin \phi :: CF : CD;$$

donc

$$\cos \phi = \frac{DF}{CF}, \quad \sin \phi = \frac{CD}{CF}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (126), il vient

$$P' = \frac{P \times DF}{CF}, \quad P'' = \frac{P \times CD}{CF}.$$

Mettant dans ces équations la valeur de P donnée par la proportion (125), on obtient

$$P' = \frac{R.HI.DF}{DC.CF}, \quad P'' = \frac{R.HI}{CF}.$$

Regardons maintenant les forces verticales R et P″ comme appliquées aux extrémités d'un levier HF, dont le point d'appui serait en M; la résultante de ces forces passera par M, et aura pour valeur $R + P''$.

Soient Z et Z′ les efforts que cette résultante verticale exerce sur les points d'appui A et B; on déterminera Z et Z′ par ces proportions

$$AB : BM :: R + P'' : Z,$$
$$AB : AM :: R + P'' : Z';$$

de même en nommant U et U′ les composantes de T sur les

points d'appui, on aura

$$AB : BG :: T : U,$$
$$AB : AG :: T : U'.$$

Ces forces U et U' étant verticales, s'ajouteront l'une à T et l'autre à T'. A l'égard de la force horizontale P', comme cette force agit sur le centre C de la roue, si nous appelons Y et Y' les composantes de P' aux points A et B, nous aurons

$$AB : CB :: P' : Y,$$
$$AB : AC :: P' : Y'.$$

Ayant construit deux rectangles dont l'un aura pour hauteur $Z + U$, et pour base Y, et dont l'autre aura pour hauteur $Z' + U'$, et pour base Y', les hypoténuses de ces rectangles exprimeront les pressions exercées sur les points d'appui; les angles de ces hypoténuses, avec les côtés des rectangles, détermineront les positions des pressions.

237. Si l'on a égard à l'épaisseur des cordes, on considérera la puissance comme appliquée au diamètre de la corde; alors le rayon du cylindre et celui de la roue devront être augmentés du demi-diamètre de la corde; et l'on aura : *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre, plus celui de la corde, est à celui de la roue, plus celui de la corde.*

238. On rapporte au tour le cabestan, qui n'est autre chose qu'un tour dont l'axe du cylindre est vertical.

239. Soit un système de tours arrangés dans l'ordre suivant : la puissance P appliquée à la roue AD (fig. 123), fait mouvoir le cylindre BC qui communique à une seconde roue A'D' par une corde BA'; cette roue A'D' fait mouvoir le cylindre O'B', auquel une corde B'A'' est attachée, et ainsi de suite jusqu'au dernier cylindre qui est chargé de la résistance R.

Fig. 123.

Si tout le système est en équilibre et que nous nommions T, T′, T″, etc., les tensions des cordes BA′, B′A″, etc., nous aurons,

Pour le premier tour... $P : T :: OB : OA$;
Pour le second........ $T : T' :: O'B' : O'A'$;
Pour le troisième...... $T' : R :: O''B'' : O''A''$.

Ces proportions étant multipliées par ordre, nous donnent celle-ci,

$$P : R :: OB \times O'B' \times O''B'' : OA \times O'A' \times O''A'',$$

d'où l'on tire

$$\frac{P}{R} = \frac{OB \times O'B' \times O''B''}{OA \times O'A' \times O''A''};$$

ce qui nous apprend que *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est à celui des rayons des roues.*

Ainsi dans le cas où le rayon de chaque cylindre serait la n^e partie de celui de la roue qui le met en mouvement, on aura

$$P : R :: \frac{OA}{n} \times \frac{O'A'}{n} \times \frac{O''A''}{n} : OA \times O'A' \times O''A'',$$

proportion qui revient à celle-ci,

$$P : R :: 1 : n^3.$$

240. Les roues dentées ne diffèrent de la disposition précédente, que par les dents également distantes dont leurs circonférences sont garnies. Ces dents ont le même emploi que les cordes de la figure 123; chaque roue est traversée par l'axe de son pignon qui est une roue dentée plus petite, garnie de dents qu'on nomme *ailes*. La première roue fait tourner son pignon qui engrène dans la seconde roue; celle-ci à son tour, Fig. 123.

ayant son pignon engrene dans la roue suivante, la fait mouvoir; ainsi de suite.

Les pignons représentant les cylindres de la combinaison précédente, il s'ensuit que, dans les roues dentées, on a la proportion : *La puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est à celui des rayons des roues.*

Fig 124. 241. Soient (fig. 124) D, D′, D″, etc., les nombres de dents des roues A, A′, A″, etc., et d, d', d'', etc., les nombres d'ailes de leurs pignons a, a', a'', etc., et supposons que tandis que la roue A fait N tours, les roues A′, A″, A‴, etc., en fassent, la première N′, la seconde N″, etc. A chaque révolution de A, le pignon a engrènera successivement toutes ses ailes avec la roue A′; de sorte que dans N révolutions, il engrènera, avec A′, un nombre d'ailes exprimé par Nd : de même la roue A′ faisant N′ tours, engrènera un nombre N′D′ de dents avec le pignon a; et comme les nombre de dents et d'ailes engrenées par la roue A′, et par le pignon a doivent être égaux, il faudra que l'on ait

$$N'D' = Nd;$$

par la même raison, les autres roues nous fourniront les équations

$$N''D'' = N'd', \quad N'''D''' = N''d'', \text{ etc.}$$

Multipliant ces équations par ordre, nous aurons, en supposant seulement quatre roues,

$$N'''D'D''D''' = Ndd'd'';$$

d'où l'on tirera

$$N''' = N\frac{dd'd''}{D'D''D'''}.$$

Par exemple, si l'on demande le nombre de dents qu'il faut employer pour que la roue A‴ fasse une révolution dans le même temps que la roue A en fait 60, nous aurons

$$N''' = 1, \quad N = 60, \quad 1 = 60 \cdot \frac{dd'd''}{D'D''D'''} \ldots (127).$$

Prenant arbitrairement les nombres d, d', d'', nous pourrons supposer $d = 4$, $d' = 5$, $d'' = 7$; cette hypothèse réduit la dernière des équations (127) à

$$D'D''D''' = 60 \times 4 \times 5 \times 7 = 8400.$$

8400 partagé en trois facteurs, nous donne les nombres 12, 25 et 28. Ainsi en faisant D', D'', D''' respectivement égaux à ces nombres, nous avons une solution du problème qui, comme on le voit, est indéterminé.

Observons qu'on doit prendre $N''' < N$ parce que supposant $d < D'$, $d' < D''$, $d'' < D'''$, A''' va plus lentement que A.

242. C'est encore par le principe de l'équilibre du tour, que l'on explique le mécanisme du cric. On distingue deux sortes de crics, le simple et le composé. Le cric simple est une caisse de bois CD (fig. 125), dans laquelle se meut une barre de fer, garnie de dents d'un côté; ces dents engrènent avec un pignon EF qu'on met en mouvement à l'aide d'une manivelle : alors la barre de fer, pressée par l'effort du pignon, sort de la caisse DC, monte et soulève la résistance. Fig. 125

Dans cette machine, le pignon et le bras de la manivelle (*) agissant comme le cylindre et la roue du tour, il en résulte que *la puissance est à la résistance comme le rayon du pignon est au bras de la manivelle.*

243. Dans le cric composé, la manivelle met en mouvement un pignon qui engrène avec une roue; cette roue engrène à son tour avec un second pignon; ainsi de suite jusqu'au dernier pignon, qui engrène avec la barre de fer.

(*) Par le bras de la manivelle, on entend le rayon du cercle décrit par la puissance.

D'après ce qui précède, on voit que dans cette machine *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est à celui des roues par le bras de la manivelle.*

Du Plan incliné.

244. Le plan incliné est ainsi appelé, parce qu'il fait un angle avec l'horizon; son usage est de servir à soutenir un corps, en le mettant en équilibre avec d'autres forces.

Fig. 126. Soit un corps M (fig. 126), dont nous considérerons le poids P comme attaché à son centre de gravité par un fil vertical MP. Pour que ce corps puisse être en équilibre sur un plan incliné avec une force Q, la première condition est que les forces P et Q aient une résultante unique, ce qui exige que leurs directions se rencontrent en un point M : or, MP étant une verticale qui passe par le centre de gravité, le plan PMQ sera aussi vertical et contiendra le centre de gravité. Ainsi la première condition d'équilibre est que la direction MQ de la force Q doit être dirigée dans un plan vertical qui passe par le centre de gravité du corps.

La seconde condition est que la résultante MN des forces P et Q soit détruite par la résistance du plan incliné, ce qui ne peut être, à moins que cette droite ne soit normale au plan incliné, et ne le rencontre en un de ses points.

Cette seconde condition se modifie un peu, lorsque le corps ne touche le plan incliné que par plusieurs points; car en unissant ces points par des lignes droites, il suffit que la résultante normale passe par un des points du polygone renfermé dans ces droites, pour qu'il puisse y avoir équilibre.

245. Les conditions que nous venons d'énoncer étant remplies, soit KL (fig. 126) un corps retenu en équilibre sur un plan incliné par une force Q. Prenons des parties ME, MF proportionnelles au poids P et à la force Q, et construisons le parallélogramme FMER : la diagonale MR représentera la

Fig. 126.

pression que le corps exerce sur le plan incliné; nommons R cette pression, nous aurons

$$Q : P : R :: \sin PMR : \sin QMR : \sin PMQ \ldots (128).$$

Les angles PMR, CAB étant égaux en vertu de la similitude des triangles AOP, OMN, nous avons

$$\sin PMR = \sin A = \frac{CB}{AC};$$

substituant cette valeur dans la proportion (128), et multipliant les seconds rapports par AC, cette proportion se changera en celle-ci,

$$Q : P : R :: CB : AC \times \sin QMR : AC \times \sin PMQ.$$

246. Si la puissance prend la direction MQ (fig. 126) parallèle à la longueur du plan incliné, les triangles MER, ACB deviennent semblables, parce que les angles C et E sont égaux, l'étant chacun à l'angle MOC; d'où il suit que l'on a la proportion Fig. 126.

$$ER : ME :: CB : AC;$$

ce qui nous apprend que lorsque la puissance est parallèle à la longueur du plan incliné, *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

247. Si la puissance MF devient parallèle à la base du plan incliné, les triangles perpendiculaires MER, CAB (fig. 127) donnent la proportion Fig. 127.

$$ER : ME :: CB : AB,$$

ou

$$Q : P :: CB : AB;$$

donc, dans ce cas, *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

248. Lorsque l'angle A est la moitié d'un angle droit, la puissance est égale à la résistance; mais si A est moindre que la

moitié d'un angle droit, la base du plan incliné en surpasse la hauteur; alors la machine devient avantageuse à la puissance.

De la Vis.

Fig. 128. 249. Partageons les côtés d'un rectangle AM' (fig. 128) en parties égales par des parallèles BB', CC', etc., et menons les diagonales AB', BC', etc.; si en courbant ce rectangle, nous en formons un cylindre à base circulaire, la droite MA se confondra avec la droite M'A'; et alors les points B et B', C et C', etc., qui sont les extrémités des diagonales AB', BC', etc., se confondant, ces diagonales se lieront les unes
Fig. 129. aux autres, et traceront sur le cylindre PQMN (fig. 129) une courbe régulière PRSTUV, etc., à laquelle on a donné le nom d'*hélice*.

250. La propriété caractéristique de cette courbe est que tous ses élémens forment des angles égaux avec les droites menées par ces élémens sur la surface du cylindre, parallèlement à son axe; car cette propriété subsistant dans le parallélogramme AM' à l'égard des élémens m, m', m'', etc., qui forment des angles égaux avec les parallèles EF, E'F', etc., il en sera de même lorsque le parallélogramme deviendra la surface convexe d'un cylindre.

D'après cette génération de l'hélice, on voit que les dis-
Fig. 128. tances mn, $m'n'$, $m''n''$, etc. (fig. 128), étant égales, la même chose aura lieu encore sur le cylindre; par conséquent si
Fig. 129 l'on prend mn (fig. 129) pour base d'un triangle isocèle mno dont le plan soit normal à la surface du cylindre, et que l'on fasse mouvoir ce triangle parallèlement à lui-même, de manière que les extrémités m et n de sa base restent toujours sur deux arcs d'hélice, ce triangle, en montant ainsi sur la surface cylindrique, la recouvrira d'un filet saillant qui, conjointe-

ment avec le cylindre, composera la vis; ce filet saillant est appelé *le filet de la vis.*

On voit que le filet de la vis n'est autre chose ici qu'un prisme triangulaire qui serait appliqué et recourbé sur le cylindre, en forme d'hélice.

Quelquefois le filet de la vis, au lieu d'être engendré par un triangle isocèle, l'est par un rectangle : dans ce cas, la vis est à filet carré.

251. L'écrou est une pièce creusée en hélice, et d'une longueur moindre que celle de la vis. On peut considérer l'écrou comme le moule d'une partie du filet de la vis.

La vis tourne dans l'écrou, et, à chaque révolution, parcourt un chemin égal au pas de la vis.

Les circonstances du problème étant les mêmes, soit que la vis tourne dans l'écrou, soit que l'écrou tourne dans la vis, nous adopterons cette seconde hypothèse.

252. Cherchons maintenant le rapport de la puissance à la résistance dans cette machine. Pour cela, plaçons la vis verticalement dans son écrou, de manière que l'écrou entoure la partie supérieure du filet de la vis; supposons que l'écrou soit partagé en différentes molécules m, m', m'', etc., qui reposent chacune sur le filet de la vis; et cherchons la force qui mettrait en équilibre la seule molécule m (fig. 130). Fig. 130.
Il est certain que si cette molécule abandonnée à elle-même n'était sollicitée que par l'action de la pesanteur, elle glisserait le long du filet, et décrirait une hélice sur un cylindre qui aurait pour rayon la distance mC de la molécule à l'axe de rotation. Ainsi en considérant l'hélice comme un plan incliné, ce plan aura pour hauteur le pas de la vis, et pour base la circonférence décrite par mC.

Supposons maintenant que la force horizontale P (fig. 131), Fig. 131.
appliquée immédiatement à la molécule m, tienne son poids m en équilibre. On construira un triangle rectangle mHK

Fig. 131. qui ait pour hauteur mH le pas de la vis, et pour base la circonférence décrite par mC, et l'on aura, en vertu de la théorie du plan incliné,

$$P : m :: hauteur : KH,$$

ou

$$P : m :: mH : circonférence\ Cm \ldots \quad (129).$$

Mais si la puissance, au lieu d'être appliquée immédiatement au point m, est appliquée à l'extrémité D du levier CD, et que l'on veuille que cette puissance Q produise le même effet que P, il faudra que P et Q soient en raison inverse des bras de levier; c'est-à-dire que l'on ait

$$Q : P :: Cm : CD,$$

ou

$$Q : P :: circ.Cm : circ.CD.$$

Multipliant terme à terme cette proportion par la proportion (129), on aura

$$Q : m :: mH : circ.CD.$$

Donc pour la molécule m, la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence dont le rayon est la distance du point d'application du levier à l'axe du cylindre.

Cette proportion ayant lieu quelle que soit la distance Cm de la molécule à l'axe, concluons que pour les autres molécules chargées des poids m', m'', m''', etc., et retenues par des forces Q', Q'', Q''', etc., on aura encore

$$Q' : m' :: mH : circ.\ CD,$$
$$Q'' : m'' :: mH : circ.\ CD,$$
$$Q''' : m''' :: mH : circ.\ CD.$$

On tirera de ces proportions et de la précédente,

$$Q = \frac{m \,.\, m\mathrm{H}}{circ \,.\, \mathrm{CD}},\ Q' = \frac{m' \,.\, m\mathrm{H}}{circ \,.\, \mathrm{CD}},\ Q'' = \frac{m'' \,.\, m\mathrm{H}}{circ \,.\, \mathrm{CD}} \ldots \ (130).$$ Fig. 131.

Les distances des molécules m, m', m'', etc., à l'axe, ainsi que leurs hauteurs, n'entrant pas dans ces expressions, concluons que les points d'application des puissances horizontales Q, Q′, Q″, etc., en sont indépendans.

Supposons donc que ces points soient également éloignés de l'axe du cylindre; alors les forces Q, Q′, Q″, etc., en quelque part qu'elles soient situées, communiqueront au système le même mouvement de rotation que si elles agissaient suivant DQ. Par conséquent nous aurons le droit de réunir les valeurs de ces forces. Ainsi en ajoutant les équations (130), nous trouverons

$$m + m' + m'' + \text{etc.} = (Q + Q' + Q'' + \text{etc.}) \frac{circ \,.\, \mathrm{CD}}{m\mathrm{H}};$$

et comme la somme $m + m' + m'' +$ etc., représente le poids M de l'écrou, et que les forces horizontales Q, Q′, Q″, etc., peuvent être remplacées par une force unique Q appliquée au point D, nous aurons

$$\mathrm{M} = Q \frac{circ \,.\, \mathrm{CD}}{m\mathrm{H}},$$

d'où l'on tire

$$Q : \mathrm{M} :: m\mathrm{H} : circ. \mathrm{CD};$$

ce qui nous apprend que, dans la vis, *la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence de l'arc décrit par la puissance autour de l'axe.*

Il est évident que cette machine est d'autant plus avantageuse à la puissance, que le pas de la vis a moins de hauteur, et que le point d'application de la puissance est plus éloigné de l'axe.

Du Coin.

253. On a donné le nom de *coin* à un prisme triangulaire que l'on fait entrer par l'une de ses arètes dans la fente d'un corps pour en augmenter l'ouverture; cette arète qui pénètre le corps, est appelée *le tranchant du coin*, la face opposée en est la tête, et les deux autres faces quadrangulaires en sont les côtés.

Tous les instrumens tranchans, tels que la hache, le ciseau, les rasoirs, etc., se rapportent au coin.

254. Le coin étant frappé sur sa tête, recevra une impulsion qui représentera la puissance; nous supposerons que cette impulsion soit perpendiculaire à la tête du coin; car si elle ne l'était pas, elle pourrait se décomposer en deux forces, l'une perpendiculaire à la tête du coin, et l'autre dirigée dans son plan. Cette dernière force ne tendant qu'à faire glisser la puissance sur la tête du coin, nous ne la considérerons pas.

Fig. 132. Cela posé, soit ABC (fig. 132) le coin vu de profil, AC et BC en représenteront les côtés; alors la tête du coin sera la droite AB, sur laquelle la force P agira perpendiculairement.

Cette force tendant à écarter les côtés AC et BC, ne peut être contrebalancée que par l'adhérence mutuelle des particules du corps : or, cette adhérence n'étant pas la même dans toutes les substances, nous ne pouvons évaluer le rapport de la puissance à la résistance dans cette machine. Ainsi nous chercherons seulement le rapport de la puissance aux pressions exercées sur les côtés AC et BC.

Pour cet effet, ayant représenté la force F par la droite arbitraire DE, on mènera sur les côtés AC et BC, les perpendiculaires DM et DN; et ayant construit le parallélogramme DIEK, les composantes DI et DK seront les pressions exercées.

sur les côtés AC et BC. Nommons X et Y ces pressions, les triangles perpendiculaires ABC, IDE nous donneront

$$DE : DI : IE :: AB : AC : BC,$$

ou, à cause que IE peut être remplacé par DK, cette proportion deviendra

$$F : X : Y :: AB : AC : BC,$$

ou (fig. 133) Fig. 133.

$$F : X : Y :: AB \times GH : AC \times GH : BC \times GH.$$

Les produits $AB \times GH$, $AC \times GH$ et $BC = GH$ représentant la tête et les côtés du coin, concluons que, dans cette machine, *la puissance* F *et les efforts* X *et* Y *qui agissent sur les côtés du coin, sont proportionnels à sa tête et à ses côtés.*

Le coin sera d'autant plus avantageux, que sa tête aura moins de surface, ou que ses côtés en auront plus; car alors les pressions latérales deviendront plus grandes à l'égard de la puissance.

Du Frottement.

255. Lorsqu'un corps repose sur un plan horizontal, la résistance de ce plan détruisant l'effet de la pesanteur, la moindre impulsion lui donnerait du mouvement, s'il n'était retenu par des causes physiques qui s'opposent à ce mouvement. La plus influente de ces causes est le frottement; on appelle ainsi cette force qui empêche un corps de glisser sur un plan, et qui est due aux petites aspérités des particules matérielles qui engrènent les unes dans les autres, et qui occasionent une force passive qui augmente ou diminue la résistance, suivant que la puissance tend à pousser le corps ou à le retenir.

On a reconnu que le frottement était sensiblement propor-

tionnel à la pression, mais que cette loi cessait d'avoir lieu lorsque la pression devenait trop grande. Ainsi en représentant par f le frottement exercé par un corps homogène AB
Fig. 134. (fig. 134), animé de l'unité de poids, si AB′ est double de AB, le frottement sera $2f$; si AB″ est triple de AB, le frottement sera $3f$; ainsi de suite : de sorte qu'en représentant par F le frottement exercé par le corps AM qui renferme un nombre N d'unités de poids, nous aurons

$$F = Nf\ldots \quad (131).$$

256. Voici comment on peut mesurer le frottement.

Fig. 135. Soit AB (fig. 135) le corps qui exerce l'unité de pression sur le plan horizontal LK. Ce corps étant sollicité par un fil CDE qui, passant par une poulie de renvoi, soutient le poids M; si l'on augmente successivement ce poids, l'intensité qu'il aura lorsqu'il sera prêt à vaincre la résistance, mesurera le frottement f exercé par l'unité de pression.

257. Il existe une autre manière de mesurer le frottement, et qui nous est donnée par le théorème suivant : Si l'on place
Fig. 136. un corps MN sur un plan incliné AC (fig. 136), et que l'on augmente l'angle A que le plan incliné fait avec l'horizon, jusqu'à ce que le corps soit sur le point de glisser, l'nnité de frottement f sera égale à tang A.

Pour le démontrer, menons par le centre de gravité G du corps les perpendiculaires GD et GK, l'une au plan horizontal, et l'autre au plan incliné. Représentons par GD le poids du corps, et décomposons GD en deux forces GH et GK, la première parallèle au plan incliné, et la seconde perpendiculaire à ce plan, nous aurons

$$GH = DK = GD \sin DGK,$$
$$GK = GD \cos DGK;$$

or, les angles DGK et CAB sont égaux comme complémens

des angles aigus dont le sommet est en I. Nous pourrons donc, Fig. 136.
dans les équations précédentes, remplacer DGK par A, ce qui nous donnera

$$GH = GD \sin A,$$
$$GK = GD \cos A,$$

ou plutôt

$$GH = N \sin A,$$
$$GK = N \cos A.$$

La pression que supporte le plan incliné étant exprimée par $GK = N \cos A$, l'intensité du frottement sera mesurée par $N \cos A . f$; mais le frottement étant la force qui empêche le corps de glisser, devra faire équilibre à la composante $GH = N \sin A$ qui agit dans le sens de la longueur du plan incliné, d'où il suit qu'on aura

$$N \cos A . f = N \sin A.$$

On tire de cette équation

$$f = \text{tang } A \ldots \quad (132);$$

258. Cet angle est ce qu'on appelle l'angle du frottement. Il n'est constant que dans l'hypothèse où la loi qu'il suit est d'être proportionnel à la pression. En effet, nous n'avons obtenu l'équation (132) qu'en employant celle du n° (131) qui renferme cette loi; mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer, on a reconnu qu'elle cessait d'exister lorsque la pression est fort grande.

259. Les différentes substances ayant les pores plus ou moins resserrés, le frottement n'est pas le même pour toutes les matières; c'est pourquoi on a cherché à constater par des expériences celui qui est propre à chacune.

Par exemple, voici quelques résultats que *Coulomb* a ob-



Fig. 136. tenus en cherchant le rapport du frottement à la pression :

Fer contre fer........... $f=0,28$,
Fer contre cuivre jaune.... $f=0,26$,
Chêne contre chêne........ $f=0,43$,
Chêne contre sapin....... $f=0,65$.

Ces dernières valeurs ont été trouvées en mesurant le frottement suivant le fil du bois ; mais on sent qu'elles seraient bien différentes si ce fil était dirigé dans un autre sens que celui selon lequel agit le frottement ; car les aspérités du corps présentant moins de prise à l'engrenage, le frottement devrait être plus faible.

259. Le poli des surfaces et les substances onctueuses qu'on répand sur les corps, contribuent aussi à diminuer le frottement.

C'est en ayant égard à toutes ces circonstances qu'on pourra en perfectionner les tables. En attendant, on peut consulter avec avantage celles de Brisson.

260. L'adhérence des corps est encore une des causes physiques qui s'opposent à leur mouvement. On ne peut l'évaluer d'une manière fort exacte, parce qu'elle est susceptible de s'accroître beaucoup avec le temps, dans les machines qui ne sont point en action, et, au contraire, de s'altérer quelquefois dans celles qui sont en mouvement.

La loi qu'elle suit est d'être sensiblement proportionnelle aux surfaces adhérentes. Ainsi, en représentant par ψ l'adhérence relative à l'unité de surface, celle qui a lieu sur la surface a aura pour expression $a\psi$.

Théorie du frottement dans quelques machines.

Fig. 137. 261. Soient (fig. 137) P le moteur et S la résistance appliqués à un point m d'un corps, et qui, le tenant en équilibre

sur un plan incliné, forment des angles α et α', avec la longueur de ce plan. S'il n'y avait ni frottement ni adhérence, les conditions de cet équilibre se réduiraient à Fig. 137.

$$P \cos \alpha = S \cos \alpha' \ldots \quad (133);$$

mais si l'on a égard au frottement et à l'adhérence, comme ces deux forces sont contraires au moteur lorsque celui-ci tend à pousser m vers B, il faut qu'elles soient ajoutées à la résistance $S \cos \alpha'$. Pour les déterminer, nous remarquerons d'abord que la pression exercée sur le plan incliné provient non-seulement de la composante de P, perpendiculaire en m, mais encore de la composante de S, perpendiculaire au même point. La première a pour expression $P \sin \alpha$, et la seconde $S \sin \alpha'$. La totalité de ces deux pressions sera donc la quantité que nous avons représentée par N dans l'équation (131), de sorte que la force due au frottement sera exprimée par $(P \sin \alpha + S \sin \alpha') f$. Quant à celle qui est due à l'adhérence, nous avons vu qu'en supposant que a soit la surface sur laquelle elle agit, cette adhérence avait pour valeur $a\psi$. Ajoutant donc ces deux forces au second membre de l'équation (133), nous aurons pour condition d'équilibre,

$$P \cos \alpha = S \cos \alpha' + S \sin \alpha' . f + P \sin \alpha . f + a\psi ;$$

on tire de cette équation

$$P = \frac{S \cos \alpha' + Sf \sin \alpha' + a\psi}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \ldots \quad (134).$$

262. Si, au contraire, la puissance ne fait que retenir le point m, et que la résistance tende à l'entraîner vers B, ce sera cette dernière qui aura à vaincre le frottement et l'adhérence; par conséquent ces deux forces agiront en faveur du moteur, et devront changer de signe. Représentons donc par P′ le moteur qui convient à cette hypothèse, nous

aurons

$$P' = \frac{S \cos \alpha' - Sf \sin \alpha' - \pi \psi}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \ldots \quad (135).$$

263. Occupons-nous maintenant de l'équilibre du levier et de celui de la poulie, en ayant égard au frottement.

Supposons donc qu'un cylindre droit et vertical traverse un levier : comme les circonstances sont les mêmes, soit que le cylindre tourne autour du levier, soit que le levier tourne autour du cylindre, nous adopterons cette dernière hypothèse, et nous considérerons un point m du levier qui

Fig. 138. (fig. 138), étant en contact avec le cylindre, est soumis à l'action du frottement. Si ce cylindre fixe est coupé au point m par un plan horizontal, nous pourrons prendre ce plan pour celui des x, y, et y ramener toutes les forces; car en les décomposant en deux groupes, les unes horizontales et les autres verticales, ces dernières seront détruites par le cylindre qu'on suppose fixe. Les sections du cylindre et du levier, pour le plan des x, y, seront respectivement représentées par le cercle mBE et par la courbe plane GIL. Cela posé, il résulte de l'immobilité du cylindre, que le point m ne pourra éprouver qu'un mouvement circulaire autour du point C où l'axe de ce cylindre est coupé par le plan des x, y. Le point m serait effectivement emporté suivant la circonférence de ce cercle, s'il n'était mis en équilibre par le frottement combiné avec la résultante R des forces du système, et avec la résistance qu'oppose l'axe fixe. Cette résistance étant une force normale qui agit suivant la droite mC, nous pouvons substituer cette force au cylindre fixe, et regarder le point m comme un point libre qui serait mis en équilibre par les trois forces suivantes : 1° la force normale dirigée de m en C; 2° le frottement qui agit suivant la tangente mD; 3° la résultante R de toutes les forces du système.

264. Remarquons que quoique deux de ces trois forces

soient appliquées en m, il ne s'ensuit pas que la force R Fig. 138.
aboutisse aussi au même point m; car bien qu'en général l'équilibre ne puisse subsister entre trois forces que lorsqu'elles concourent en un même point, les deux forces dirigées suivant les droites mD et mC peuvent être seules appliquées au point m, parce que la troisième force, en se rattachant à un autre point A, peut tendre également à entraîner m à l'aide des points du corps qui sont tous liés entre eux.

D'après cette observation, il suffit qu'on ignore en quel endroit est situé le point d'application A de la force R, pour qu'on puisse le supposer différent de m.

Ainsi les conditions d'équilibre de nos trois forces rentrent dans celles que nous avons prescrites art. 101.

265. Pour satisfaire à ces conditions, nous placerons l'origine des coordonnées au point C, et nous représenterons par N la force normale qui forme des angles α et β avec les axes; par F le frottement qui forme des angles α' et β' avec les mêmes axes, et enfin par h le rayon du cylindre, qui est censé être à peu près le même que celui du trou dans lequel on adapte le levier. A l'égard de R, qui est la troisième force, nous désignerons par X et par Y ses composantes dans le sens des x et dans celui des y, et par r la perpendiculaire abaissée du point C sur la direction de cette force.

Cela posé, la condition de l'art. 101, qui exige que la somme des composantes dans le sens des x soit égale à zéro, revient à dire que l'une des composantes de ces forces est égale à la somme algébrique des autres; par conséquent, en prenant $N\cos\alpha$ pour cette composante, nous devrons avoir

$$N\cos\alpha = X + F\cos\alpha' \ldots \quad (136).$$

Par la même raison, les composantes dans le sens des y nous fourniront l'équation

$$N\cos\beta = Y + F\cos\beta' \ldots \quad (137);$$

enfin la troisième équation d'équilibre, qui est celle qui dérive du principe des momens, nous donnera

$$Rr = Fh \ldots \quad (138),$$

et deviendra, en mettant pour F sa valeur donnée par l'équation (131),

$$Rr = Nfh \ldots \quad (139).$$

266. Avant que de faire usage des équations (136) et (137), remarquons qu'une seule des quatre quantités angulaires $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha'$, $\cos\alpha'$, qui entrent dans ces équations, suffit pour déterminer toutes les autres. En effet, l'angle yCx
Fig. 138. (fig. 138) des coordonnées étant droit, nous avons

$$\cos\mathcal{C} = \sin\alpha;$$

Fig. 139. d'un autre côté, si l'on mène une parallèle FK à CB (fig. 139), nous aurons

$$BFH = BFK + KFH,$$

ou

$$\alpha' = 100^\circ + \alpha;$$

par conséquent

$$\cos\alpha' = \cos 100 \cos\alpha - \sin 100 . \sin\alpha = - \sin\alpha,$$

$$\cos\mathcal{C}' \quad \text{ou} \quad \sin\alpha' = \sin 100 \cos\alpha + \sin\alpha \cos 100 = \cos\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs de $\cos\mathcal{C}$, de $\cos\alpha'$ et de $\cos\mathcal{C}'$, les équations (136) et (137) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\alpha = X - F\sin\alpha \\ N\sin\alpha = Y + F\cos\alpha \end{array}\right\} \ldots \quad (140).$$

267. Ces équations subissent encore une autre modification si l'on fait attention que le frottement exercé sur le point m est proportionnel à la force normale N, qui presse ce point contre le cylindre, ce que nous avons exprimé par l'équa-

tion (131); par conséquent, nous pourrons remplacer F par Nf dans les équations (140), qui nous donneront pour les valeurs de X et de Y,

$$\left.\begin{array}{l} X = N\cos\alpha + Nf\sin\alpha \\ Y = N\sin\alpha - Nf\cos\alpha \end{array}\right\}\ldots\ (141);$$

mais X et Y étant les composantes d'une force R, on a entre ces forces la relation

$$R^2 = X^2 + Y^2.$$

Mettant, dans cette équation, les valeurs de X et de Y, que nous venons de trouver, nous obtiendrons

$$R^2 = N^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + N^2f^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

équation qui, parce que la somme des carrés des sinus et des cosinus est égale à l'unité, se réduit à

$$R^2 = N^2(1 + f^2)\ldots\ (142).$$

Substituant dans l'équation (139) la valeur de R tirée de cette dernière, nous obtiendrons

$$r = \frac{fh}{\sqrt{1+f^2}}\ldots\ (143).$$

Cette valeur de r est toujours moindre que h, parce que le dénominateur de la fraction $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ surpasse évidemment son numérateur; mais h étant le rayon du cylindre, il suit de là que l'équilibre n'est possible que lorsque la distance r du point C à la résultante, est au-dessous de ce rayon. Dans ce cas, on voit que la direction de cette résultante coupe nécessairement le cylindre. Cette condition, sans laquelle l'équilibre du levier, par le frottement, est impraticable, ne suffit pas encore; car il faut en outre que R n'ait point d'autre valeur que celle qui est déterminée par l'équation (142); autrement

l'équation des momens, sur laquelle cette dernière repose, n'aurait pas lieu.

268. Nous ferons remarquer ici que cette équation des momens exprime implicitement la condition que le frottement doit faire équilibre à la résultante de toutes les forces. En
Fig. 140. effet, décomposons la force R représentée par AB (fig. 140) en deux autres, l'une AC dirigée au point C, et l'autre dans le sens de la tangente AF. Il est évident que la première serait détruite par le point fixe C, et qu'il ne resterait que la composante AD, qui devrait par conséquent faire équilibre à la force F, qui agit suivant la même tangente, ce qui exigerait que AD fût égal à la force F, et agît en sens contraire. Or, c'est ce que nous dit notre équation des momens; car en menant les perpendiculaires $CI = r$ et $AL = h$, les triangles rectangles ABL, BCI, qui ont un angle commun, sont semblables, et donnent la proportion

$$AL : AB :: CI : BC,$$

ou

$$h : R :: r : AD;$$

donc

$$Rr = AD . h.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (138), et divisant par h, on trouve

$$AD = F.$$

269. On peut aussi déterminer le rapport qui existe entre la puissance et la résistance. Pour cela, nous modifierons de la manière suivante les résultats que nous avons obtenus.

Fig. 141. Soient P et S la puissance et la résistance qui (fig. 141) forment entre elles un angle θ, la résultante de ces deux forces sera donnée par l'équation (art. 31).

$$R^2 = P^2 + 2PS\cos\theta + S^2.$$

Au moyen de cette valeur de R, l'équation (142) devient Fig. 141.

$$P^2 + 2PS\cos\theta + S^2 = N^2(1 + f^2) \ldots (144).$$

270. Introduisons maintenant dans cette équation la valeur de N en fonction de P et de S. Pour cet effet, abaissons du centre C les perpendiculaires p et s sur les directions des forces P et S; le moment Rr, qui entre dans l'équation (139), se changera en Pp — Ss, ou en Ss — Pp, selon que l'un de ces momens l'emportera sur l'autre, et l'équation (139) deviendra

$$\pm(Pp - Ss) = Nfh;$$

tirant de cette équation la valeur de N^2, le double signe disparaît, et l'on obtient

$$N^2 = \frac{(Pp - Ss)^2}{f^2h^2};$$

par conséquent, en substituant cette valeur dans l'équation (144), on a enfin

$$P^2 + 2PS\cos\theta + S^2 = \frac{(Pp - Ss)^2}{h^2}\frac{(1 + f^2)}{f^2}.$$

Nous simplifierons ce résultat en faisant

$$P = Sz, \quad \text{et} \quad \frac{1 + f^2}{f^2} = k^2 \ldots (145);$$

alors S^2 disparaîtra comme facteur commun, et l'équation se réduira à

$$z^2 + 2z\cos\theta + 1 = \frac{k^2}{h^2}(pz - s)^2.$$

On tire de là

$$z^2h^2 + 2h^2z\cos\theta + h^2 = k^2(p^2z^2 - 2psz + s^2);$$

faisant passer tous les termes dans le second membre, on trouve

$$(k^2p^2 - h^2)z^2 - 2(psk^2 + h^2\cos\theta)z + k^2s^2 - h^2 = 0;$$

et, en divisant par le coefficient de z^2, on obtient

$$z^2 - 2\frac{(psk^2 + h^2\cos\theta)}{k^2p^2 - h^2}z + \frac{k^2s^2 - h^2}{k^2p^2 - h^2} = 0.$$

La valeur de z déterminée par cette équation, est le rapport de la puissance à la résistance; c'est ce que nous indique la première des équations (145); et comme z a deux valeurs, il est évident que la première se rapporte au cas où la puissance est sur le point de l'emporter sur la résistance, cas où, ayant à vaincre le frottement, elle doit avoir la plus

Fig. 141. grande intensité. Si l'on résout l'équation, on trouvera

$$z=\frac{psk^2+h^2\cos\theta\pm\sqrt{(psk^2-h^2\cos\theta)^2-(k^2p^2-h^2)(k^2s^2-h^2)}}{k^2p^2-h^2};$$

développant et réduisant la quantité qui est sous le radical, faisant passer h^2 qui devient facteur commun, en dehors du signe, et rassemblant les termes qui, sous le radical, sont multipliés par k^2, on obtiendra

$$z=\frac{psk^2+h^2\cos\theta\pm h\sqrt{k^2(p^2+2ps\cos\theta+s^2)-h^2(1-\cos\theta^2)}}{k^2p^2-h^2};$$

observant que $1-\cos\theta^2=\sin\theta^2$, et mettant la valeur de z, on aura enfin

$$\frac{P}{S}=\frac{psk^2+h^2\cos\theta\pm h\sqrt{k^2(p^2+2ps\cos\theta+s^2)-h^2\sin\theta^2}}{k^2p^2-h^2}.$$

271. Si le rayon du cylindre est très petit, on peut négliger son carré h^2, et notre équation se réduit à

$$\frac{P}{S}=\frac{s}{p}\pm h\frac{\sqrt{(p^2+2ps\cos\theta+s^2)}}{kp^2}.$$

Si les perpendiculaires p et s abaissées du centre C sur les directions de la puissance et de la résistance, sont égales, on tombera dans le cas de la poulie; et si l'on néglige toujours h^2, on trouvera

$$\frac{P}{S}=1\pm\frac{h\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{kp}\ldots\ (146).$$

272. Enfin, si la puissance P et la résistance S ont des directions parallèles, on a $\theta=0$, d'où l'on déduit

$$\sin\theta=0,\quad\text{et}\quad\cos\theta=1;$$

cette dernière valeur change l'équation (146) en

$$\frac{}{}=1\pm\frac{2h}{kp}.$$

Du principe des vitesses virtuelles.

273. Le principe des vitesses virtuelles, découvert par Galilée, et dont Jean Bernouilli et Lagrange ont fait sentir toute la fécondité, peut être, dans de certains cas, d'une très grande utilité pour mettre un problème de Statique en équation. Lagrange, qui l'a pris pour base de sa Mécanique analytique, le regarde comme si essentiel, qu'il pense que

tous les moyens généraux que l'on peut employer pour la solution des problèmes qui concernent l'équilibre, ne sont que des applications plus ou moins directes de ce principe.

274. On entend par vitesse virtuelle le chemin que décrirait le point d'application m d'une force, si l'équilibre était infiniment peu troublé. Ainsi, en supposant que le point d'application m (fig. 142) d'une force P, par un dérangement instantané, vienne en n, la petite ligne mn qu'il décrira sera la vitesse virtuelle de la force P. Fig. 142.

275. Le moment de cette vitesse virtuelle n'est pas le produit de P par la petite ligne mn, mais, suivant l'acception que lui donne Galilée, est le produit de P par la vitesse virtuelle évaluée dans le sens de P, c'est-à-dire est le produit de P par la projection ma de mn sur la direction de P.

Nommons p cette projection, le produit Pp sera donc ce que Galilée appelle le moment de la force P; on voit que le mot de moment est pris ici dans une acception toute différente de celle qu'on lui donne ordinairement.

Le principe des vitesses virtuelles, comme on va bientôt le démontrer, consiste dans l'égalité à zéro de la somme de ces momens d'un nouveau genre, de sorte que si P, P', P'', etc., sont différentes forces appliquées à un système, et p, p', p'', p''', etc., les projections de leurs vitesses virtuelles, sur les directions de ces forces, on doit avoir

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (147).$$

Mais il est à observer que si quelqu'une des projections p, p', p'', etc., tombait sur le prolongement mb (fig. 143) de la force P appliquée en m, Fig. 143. cette projection serait négative; et, comme les forces P, P', P'', etc., sont toutes censées positives, art. 35, le moment qui appartiendrait à cette projection négative serait donc aussi négatif; c'est ce que nous exprimerons en sous-entendant que l'équation (147) se compose de la somme algébrique des produits Pp, $P'p'$, $P''p''$, etc.

276. Nous allons d'abord démontrer le principe des vitesses virtuelles, dans le cas où plusieurs forces sont appliquées à un même point. Pour cela, soit P la résultante d'un certain nombre de forces P', P'', P''', etc., appliquées au point m (fig. 144), et dont les distances respectives sont Fig. 144. invariables; si, par l'effet d'un dérangement instantané, le point m est transporté en n, la ligne mn étant infiniment petite, pourra être regardée comme droite. Plaçons dans sa direction l'axe des x, et nommons α, α', α'', α''', etc., les angles que les forces P, P', P'', P''', etc., font avec cet axe, nous aurons, puisqu'il y a équilibre,

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.} = 0;$$

Fig. 144. multiplions tous les termes de cette équation par la droite mn, que nous représenterons par z, cette équation deviendra

$$Pz\cos\alpha + P'z\cos\alpha' + P''z\cos\alpha'' + P'''z\cos\alpha''' + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (148).$$

Or, il est évident que $z\cos\alpha$ ou $mn\cos nml$ n'est autre chose que la petite ligne ml, projection de mn sur la direction de P. Donc $z\cos\alpha$ est la quantité que nous sommes convenus de désigner par p, lorsque nous avons défini les vitesses virtuelles. Ce que nous disons de P pouvant s'appliquer aux autres forces, il nous est permis de remplacer les produits $z\cos\alpha'$, $z\cos\alpha''$, $z\cos\alpha'''$, par les projections p', p'', p''', etc., des vitesses virtuelles sur les directions de ces forces, et de changer l'équation (148) en celle-ci,

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0\,;$$

ce qui montre que le principe des vitesses virtuelles est vrai dans le cas de plusieurs forces appliquées à un point.

277. Le cas le plus général du principe des vitesses virtuelles est celui de plusieurs forces P, P', P'', P''', etc., appliquées à différens points d'un corps ou système de corps; ces points conservant toujours entre eux les mêmes distances, peuvent être regardés comme liés les uns aux autres par des droites inflexibles. Avant que de nous occuper de l'état général du système, lorsque son équilibre a été infiniment peu troublé, considérons seulement l'une de ces droites inflexibles mm' au moment où, par une légère impulsion donnée au système, le point m vient en n. Dans cette circonstance, l'autre extrémité m' de cette droite changera de position, et se transportera au point n', qui pourra être au-dessus

Fig. 145. de la droite mm' (fig. 145), ou au-dessous (fig. 146); supposons-le

Fig. 146. d'abord au-dessus, la droite mm', dans sa nouvelle position, sera donc

Fig. 147. représentée par nn' (fig. 147), et alors les droites mn et $m'n'$ seront des quantités infiniment petites à l'égard de mm' et de nn', puisque, par hypothèse, le dérangement du système est imperceptible. Cela posé, si par les points m et n' on mène une droite mn', comme le côté $m'n'$ est infiniment petit, il en sera de même de l'angle $n'mm'$ qui lui est opposé dans le triangle $mm'n'$; donc l'arc $n'a$ qui en est la mesure sera censé rectiligne. Or, cet arc ayant été décrit avec le rayon

Fig. 148. ma, si l'on prend (fig. 148) $mb = ma$, l'angle $bn'a$ sera droit, comme appuyé sur le diamètre, et pourra être remplacé par l'angle $mn'a$. En effet, puisque l'angle $n'ma$ est infiniment petit, il en sera de même de la somme des angles b et $bn'm$ qui est équivalente à $n'ma$; donc l'angle $mn'a$, qui ne diffère de l'angle droit que de l'angle infiniment petit $bn'm$,

Fig. 147. peut être regardé comme droit. Cela posé, le triangle $mn'a$ (fig. 147) ayant un angle commun avec le petit triangle rectangle $n'la$, lui sera

semblable, et l'on aura la proportiou Fig. 147.

$$ma : n'a :: n'a : la.$$

Or, $n'a$ étant infiniment petit à l'égard de ma, il en est de même de la à l'égard de $n'a$; et comme $n'a$ est un infiniment petit du premier ordre, la en sera un du second. Or d'après la théorie des infiniment petits, que nons avons exposée, on devra négliger la et regarder mn' comme étant égal à ml, et l'on aura de la sorte,

$$mn' = mm' + m'l.$$

Par un même raisonnement, on pronverait que si du point n' pris pour centre on décrit avec le rayon $n'm$ l'arc ma', on doit avoir

$$mn' = nn' + nh;$$

les premiers membres de ces équations étant les mêmes, on obtient

$$mm' + m'l = nn' + nh;$$

mais la droite mm' étant inextensible, doit conserver la même longueur dans sa nouvelle position : les droites mm' et nn' sont donc égales, et en les supprimant de l'équation précédente, il restera

$$m'l = nh.$$

D'un antre côté, les droites nn' et mm' doivent être regardées comme parallèles, puisqne si elles se rencontraient en nn point O (fig. 149), on Fig. 149.
anrait un triangle $m'On'$ composé de dénx côtés finis et d'un côté $m'n'$ infiniment petit; d'où il suit que l'angle O serait anssi infiniment petit, c'est-à-dire nnl. Il résulte de ce qui précède, que si l'on abaisse la perpendiculaire nk sur le côté mm' (fig. 147), on aura Fig. 147.

$$nh = mk;$$

substituant cette valeur de nh dans l'équation précédente, on obtiendra

$$m'l = mk,$$

ce qui pronve que les projections mk et $m'l$ des vitesses virtuelles mn et $m'n'$ des points m et m' sont égales.

278. Snpposons maintenant que lorsque le point m (fig. 150) est trans- Fig. 150.
porté en n, l'extrémité m' tombe en un point n' qui soit au-dessous de la première position de mm'. On pronverait, comme dans le cas précédent, que l'angle o est infiniment petit, et que par conséquent les projections ol et oh ne diffèrent pas de on' et de on, ce qui donnerait les moyéns d'établir ces équations,

$$on' = om' + m'l, \qquad on = om - mk;$$

on trouve en les ajoutant,

$$on' + on = om' + om + m'l - mh;$$

Fig. 150. ou, comme la figure 150 nous le montre,

$$nn' = mm' + m'l - mh,$$

et en transposant, on obtient

$$nn' + mh = mm' + m'l;$$

supprimant les parties égales nn' et mm', il reste

$$mh = m'l,$$

ce qui prouve encore que les projections sont égales.

279. Il est à observer que, dans le premier comme dans le second cas, les deux projections tombent, l'une sur la direction de mm', et l'autre sur son prolongement, et doivent par conséquent être de signes contraires.
Fig. 147 et 150. Cela résulte immédiatement de l'inspection des figures 147 et 150, et l'on sait que cela devait être; car si les deux projections tombaient sur mm', il faudrait que nn' fût plus court que mm', ce qui est impossible, d'après notre supposition que mm' est une droite inextensible.

Fig. 145. 280. Il résulte de ce qui précède, que si l'on considère mm' (fig. 145), comme une force qui agit sur les points m et m', et qu'on représente par (mm') cette force, par v et par v' les projections des vitesses virtuelles mn et $m'n'$ des points m et m', suivant la direction de mm', on devra avoir

$$v' = -v,$$

et par conséquent

$$(mm')v + (mm')v' = 0;$$

ce qui montre qu'en considérant une droite inflexible comme une force qui, par ses extrémités, fait équilibre à d'autres forces, la somme des momens des vitesses virtuelles de ses points extrêmes, pris dans le sens que lui donne Galilée, est égale à zéro.

281. Au moyen de cette proposition, il est facile maintenant de démontrer le principe des vitesses virtuelles, pour le cas d'un système quelconque de forces appliquées à différens points.

Fig. 151. En effet, soient P, P', P'', P''', etc. (fig. 151), différentes forces appliquées aux points m, m', m'', m''', etc.; si l'on imagine que ces points soient liés entre eux par des droites inflexibles, ces droites pourront être regardées comme des forces qui agiront sur les points m, m', m'', m''', etc.; alors, en désignant ces forces par (mm'), par $(m'm'')$, par $(m''m''')$, etc., l'équilibre sera maintenu

au point m par les forces (mm'), (mm''), (mm''') et P, Fig. 151.
au point m' par les forces $(m'm)$, $(m'm'')$, $(m'm''')$ et P',
au point m'' par les forces $(m''m)$, $(m''m')$, $(m''m''')$ et P'',
au point m''' par les forces $(m'''m)$, $(m'''m')$, $(m'''m'')$ et P'''.

Nous pourrons donc établir pour chacun de ces équilibres l'équation des momens *galiléens* qu'on a démontrée art. 276; mais, avant de procéder à cette opération, convenons de désigner par v la projection de l'une quelconque des vitesses virtuelles des points m, m', m'', etc., et de placer toujours ce signe à côté de celui du point dont il représente la vitesse. Par là, on ne pourra jamais errer sur la valeur de v. Par exemple, dans le moment $v\,(m'm'')$, v se rapportera au point m', tandis que v se serait rapporté au point m'' si nous eussions écrit ainsi ce moment, $v\,(m''m')$. De cette manière, v représentera, sans qu'on s'y méprenne, des quantités qui pourront être égales ou différentes, selon que les projections des vitesses virtuelles tomberont sur la direction d'une même droite, ou appartiendront à des droites différentes.

282. Au moyen de cette convention, et d'après ce qui précède, nous pouvons maintenant établir les équations des vitesses virtuelles qui appartiennent à ces différens points; nous avons donc, art. 276,

pour le point m, $Pp + v\,(mm') + v\,(mm'') + v\,(mm''') = 0$,
pour le point m', $P'p' + v\,(m'm'') + v\,(m'm''') + v\,(m'm) = 0$,
pour le point m'', $P''p'' + v\,(m''m') + v\,(m''m) + v\,(m''m''') = 0$,
pour le point m''', $P'''p''' + v\,(m'''m) + v\,(m'''m') + v\,(m'''m'') = 0$;

ajoutant ensemble ces équations, nous en réduirons la somme, en observant que les momens qui appartiennent à une même droite se détruisent. Nous effacerons donc $v\,(mm')$ de la première ligne, en même temps que $v\,(m'm)$ de la seconde; en continuant cette opération, nous trouverons que tous les termes affectés de v se détruisent, et il ne restera que

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0.$$

Si l'on avait un plus grand nombre de forces, la démonstration serait absolument la même.

283. Pour donner un exemple de la manière dont le principe des vitesses virtuelles peut nous faire découvrir les conditions de l'équilibre d'une machine, supposons qu'on ignore le rapport de la puissance à la résistance dans le levier, et qu'on en veuille déterminer la valeur; on observera d'abord que puisque nous n'avons que deux forces P et Q, l'équation des vitesses virtuelles se réduit dans ce cas à

$$Pp + P'p' = 0.$$

Cette équation n'a de sens que lorsque $P'p'$ est négatif, et que l'on a par conséquent

$$Pp = P'p' \ldots \quad (149).$$

Cela posé, cherchons ce qu'expriment, dans le levier, les quantités p et p'.

Fig. 152. Soient donc C le point d'appui (fig. 152) et mm' le bras du levier qui, étant sorti de son état d'équilibre, a pris la position nn', les angles opposés au sommet en C étant égaux, les arcs mn et $m'n'$ qui les mesurent seront proportionnels aux rayons, et l'on aura

$$mn : m'n' :: Cm : Cm' \ldots \quad (150).$$

Or, si par les points n et n' on mène des perpendiculaires nr et $n'r'$ sur les directions des forces P et P', nous aurons

$$mr = p, \quad m'r' = p';$$

mais en regardant les arcs infiniment petits mn et $m'n'$ comme des lignes droites, les triangles mrn, $m'r'n'$ rectangles, par construction en r et en r', seront semblables; car les triangles isocèles mCn, $m'Cn'$, donnent

$$\text{angle } nmC = \text{angle } n'm'C:$$

si l'on retranche ces angles égaux des angles droits rmC, $r'm'C$, il restera

$$\text{angle } rmn = \text{angle } r'm'n'.$$

Donc les triangles rectangles rmn, $r'm'n'$ étant alors semblables, donnent la proportion

$$mn : m'n' :: mr : m'r',$$

ou

$$mn : m'n' :: p : p';$$

donc, en vertu de la proportion (150), on a

$$Cm : Cm' :: p : p'.$$

Mais on tire de l'équation (149) des momens

$$p : p' :: P' : P;$$

donc, en comparant ces deux proportions, il vient

$$Cm : Cm' :: P' : P,$$

c'est-à-dire que les bras de levier doivent être en raison inverse des forces.

Propriété du centre de gravité d'être en général le plus haut ou le plus bas possible ; lorsqu'un système de corps est en équilibre.

284. Soient m, m', m'', les centres de gravité de différens corps liés entre eux d'une manière invariable; abaissons de ces points des perpendiculaires z, z', z'', etc., sur le plan des x, y, que nous supposerons horizontal, ce sera suivant les directions de ces perpendiculaires qu'agiront les poids P, P', P'', etc., de ces corps, qu'on regardera comme suspendus aux points m, m', m'', m''', etc. Si z est l'ordonnée du centre de gravité de la totalité du système, on aura, art. 166,

$$z_{,}=\frac{Pz+P'z'+P''z''+\text{etc.}}{P+P'+P''+\text{etc.}}.$$

Quand le système de corps change de position, et que z devient $z+h$ ou $z-h$, l'accroissement de z influe sur les autres ordonnées z', z'', z''', etc., parce que les points m, m', m'', m''', etc., étant invariablement liés entre eux, z ne peut subir un changement sans que z', z'', z''', etc., n'en éprouvent aussi un. Cette dépendance mutuelle de ces ordonnées est ce qu'on exprime en disant que z', z'', z''', etc., sont des fonctions de z. Quoiqu'en général nous en ignorions la loi, qui dépend du système de corps que l'on considère, nous pouvons représenter l'équation précédente par

$$z_{,}=\frac{Pz+P'\varphi z+P''Fz+\text{etc.}}{P+P'+P''+\text{etc.}}.$$

Or, si l'on demande quelle valeur doit avoir l'ordonnée $z_{,}$ du centre de gravité du système, pour qu'elle soit la plus grande ou la plus petite possible, on sait par la méthode des *maxima* et *minima*, que si cette valeur existe, elle doit correspondre à celle de z, qui devrait être déterminée par l'égalité à zéro de la différentielle du second membre de l'équation précédente.

Il faudrait donc que l'on eût

$$Pdz+P'd\varphi z+P''dFz+\text{etc.}=0,$$

ou plutôt

$$Pdz+P'dz'+P''dz''+\text{etc.}=0.$$

Nous allons voir que cette équation est nécessairement satisfaite d'elle-même, lorsque l'état d'équilibre du système est infiniment peu troublé. En effet, quand les centres de gravité m, m', m'', etc., changeant de

place, viennent en des points n, n', n'', etc., les chemins parcourus sont mn, $m'n'$, $m''n''$, etc. Par conséquent, si l'on projette ces chemins sur les directions primitives z, z', z'', etc., des forces P, P', P'', etc., on aura les vitesses virtuelles évaluées suivant les directions de ces forces.

Fig. 153. Or, en considérant la première, on voit que mh (fig. 153), projection de mn sur z, est égal à nk qui est l'accroissement que z a reçu en vertu du dérangement survenu dans le système, accroissement qui, suivant le cas, sera positif ou négatif. Par conséquent on aura donc, abstraction faite des signes, $p = dz$; en appliquant la même considération aux autres ordonnées, il suit de là que la différentielle $Pdz + P'dz' + P''dz''$, etc., est la même chose que $Pp + P'p' + P''p'' +$ etc.; et comme cette quantité est égale à zéro, d'après le principe des vitesses virtuelles, on doit donc avoir également

$$Pdz + P'dz' + P''dz'' + \text{etc.} = 0,$$

et par conséquent $dz_{,} = 0$, ce qui montre qu'en général le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible, dans un système en équilibre. Je dis en général, parce que l'on sait que la condition $dz_{,} = 0$ ne suffit pas toujours pour déterminer une limite.

FIN DE LA STATIQUE.

SECONDE PARTIE.

DYNAMIQUE.

De la loi d'Inertie.

285. La Dynamique, comme nous l'avons vu, est la partie de la Mécanique où l'on traite du mouvement des corps. Nous établirons d'abord en principe cette loi de la nature, que tout corps doit rester dans son état de repos ou de mouvement, à moins qu'une force étrangère ne l'en fasse sortir. Cette indifférence de la matière au mouvement comme au repos, est ce qu'on appelle son *inertie*. C'est cette force d'inertie qui fait qu'un corps frappé par un autre résiste d'abord à son impulsion avant que d'absorber une partie ou la totalité de son mouvement. C'est encore en vertu de cette force d'inertie qu'un corps qui a reçu une impulsion primitive doit se mouvoir en ligne droite d'une manière uniforme, si aucun obstacle ne s'oppose à son mouvement; car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plutôt que de l'autre, ni qu'il accélère son mouvement, ni qu'il le ralentisse. A la vérité, ne connaissant pas la nature de la force d'impulsion, nous ignorons si elle ne tendra pas à s'altérer dans le mobile; aussi ne donnons-nous cette loi de l'inertie que comme un résultat qui nous est offert par l'expérience et l'analogie.

Si nous ne voyons pas le mouvement se perpétuer ainsi dans les corps, c'est qu'il est continuellement altéré, soit par la résistance des milieux, soit par la gravitation, soit par d'au-

tres causes Le mouvement le plus simple que l'on puisse concevoir, est donc celui qui se fait en ligne droite, et qui agit d'une manière uniforme; c'est pourquoi on a donné à ce mouvement le nom de *mouvement uniforme :* tout autre mouvement porte en général le nom de *mouvement varié.*

Du Mouvement rectiligne uniforme.

286. Il résulte de la définition précédente, qu'un mobile animé d'un mouvement uniforme doit parcourir des espaces égaux dans des temps égaux; d'où il suit que si V est l'espace qu'il a parcouru dans une unité de temps, il décrira 2V au bout de deux unités de temps, 3V au bout de trois unités de temps, ainsi de suite. Par conséquent, si nous appelons t le nombre d'unités de temps écoulées pendant que le mobile a parcouru l'espace e, cet espace sera égal à $t \times V$; de sorte que nous aurons

$$e = Vt.$$

Telle est l'équation du mouvement uniforme. Le coefficient V est ce que l'on appelle *la vitesse;* on l'a ainsi nommé, parce que c'est de ce coefficient que dépend la rapidité du mouvement qui anime le mobile.

En effet, si un mobile M se meut n fois plus rapidement qu'un autre M′, il est certain que l'espace V que parcourra le premier dans l'unité de temps, sera n fois plus grand que l'espace V′ que parcourra le second dans la même unité.

287. On peut comparer les circonstances du mouvement dans deux mobiles partis au même instant d'un point A, avec des vitesses V′ et V″. Pour cela, soient e' et e'' les espaces parcourus par ces mobiles, au bout des temps t' et t''; nous aurons

$$e' = V't', \quad e'' = V''t'';$$

d'où nous tirerons

$$\frac{e'}{e''} = \frac{V't'}{V''t''};$$

ce qui nous montre que les espaces parcourus sont comme les produits des temps par les vitesses.

Si les temps sont égaux, cette équation se réduit à

$$\frac{e'}{e''} = \frac{V'}{V''};$$

par conséquent les espaces parcourus sont alors comme les vitesses.

288. Il est possible que le mobile ait déjà parcouru uniformément un espace E, avant que le temps t soit commencé; dans ce cas, on aura cette équation plus générale du mouvement uniforme

$$e = E + Vt.$$

289. Au moyen de cette équation, on résoudra facilement tous les problèmes qui concernent le mouvement rectiligne et uniforme des corps.

Par exemple, si l'on sait qu'un mobile a parcouru au bout du temps t', un espace e', et que cet espace soit devenu e'' au bout d'un autre temps t'', on peut trouver l'espace initial et la vitesse du mobile. En effet nous avons alors les équations

$$e' = E + Vt', \quad e'' = E + Vt'';$$

d'où l'on déduit

$$V = \frac{e'' - e'}{t'' - t'}, \quad E = \frac{e't'' - e''t'}{t'' - t'}.$$

290. Nous résoudrons encore ce problème : Déterminer en quel temps se rencontrent deux mobiles M et M' (fig. 154) Fig. 154.
partis au même instant des points A et B, et animés des vitesses V et V'. Soit C le point de rencontre; les espaces par-

courus par ces mobiles seront

$$BC = Vt, \quad AC = V't.$$

Appelons b la distance AB de ces mobiles; nous pourrons les considérer comme partis du même point A, en écrivant les équations

$$e = b + Vt, \quad e' = V't.$$

Alors les espaces e et e' seront représentés chacun par AC : ainsi nous pourrons égaler entre eux les seconds membres des équations précédentes; d'où l'on tirera

$$t = \frac{b}{V' - V}.$$

291. Nous terminerons ce qui concerne le mouvement uniforme en donnant l'expression différentielle de la vitesse. Pour cela, nous remarquerons que l'espace e variant en même temps que t, nous pouvons différentier l'équation $e = E + Vt$ par rapport à ces deux variables, ce qui nous donnera

$$\frac{de}{dt} = V.$$

La vitesse dans le mouvement uniforme n'est donc autre chose que le coefficient différentiel de l'espace, pris par rapport au temps; nous verrons bientôt qu'il en est de même dans le mouvement varié.

Du Mouvement varié.

292. Lorsqu'un mobile se meut en ligne droite d'une manière quelconque, on dit qu'il est animé d'un mouvement varié. Ce mouvement comprend donc, comme cas particuliers, tous les autres mouvemens rectilignes. Ainsi, pour en développer la théorie, nous considérerons en général un

corps qui serait animé d'un mouvement irrégulier dans toute sa durée. Ce corps n'a pu passer du repos à cet état de mouvement, que par l'action d'une force qu'on appelle *la force accélératrice*. Cette force n'a point communiqué ce mouvement irrégulier au corps par une seule impulsion; car la vitesse transmise par une seule impulsion devant, en vertu de la loi d'inertie, se perpétuer dans le corps, il s'ensuivrait que le mouvement serait uniforme, tandis qu'on le suppose irrégulier. Il faut donc qu'après la première impulsion, la force accélératrice en ait communiqué au corps une seconde, une troisième, etc., qui en altérant continuellement la vitesse, lui aient donné le mouvement irrégulier qu'il a. Ainsi nous regarderons la force accélératrice comme une force qui agirait continuellement sur le mobile, et qui varierait à chaque instant d'intensité.

293. La vitesse variant à mesure que le mobile est transporté d'un lieu à un autre, on ne peut évaluer celle qu'il a acquise en l'un des points de l'espace qu'il parcourt, que par l'effet que pourrait produire cette vitesse considérée comme devenue constante à partir de ce point. Ainsi, pour mesurer la vitesse lorsque le mobile est parvenu en B (fig. 155), au Fig. 155
bout du temps t, on supposera que la force accélératrice cessant tout-à-coup d'agir, le mobile se meuve d'un mouvement uniforme avec la vitesse qu'il a acquise en B. L'espace BC qu'il parcourra dans l'unité de temps avec ce mouvement uniforme, sera ce qu'on appelle *la vitesse*.

On prend ordinairement la seconde pour unité de temps. D'après cette convention, la vitesse du mobile, au bout du temps t, sera donc l'espace qu'il décrirait dans la seconde de temps qui succéderait à t, si à l'expiration de t, la force accélératrice cessait de donner de nouvelles impulsions au mobile.

294. Cherchons maintenant à déterminer l'expression ana-

lytique de la vitesse. Pour cet effet, considérons le mobile, lorsqu'à l'expiration de t il est arrivé au point B; il est certain que l'espace parcouru AB, représenté par e, devant être déterminé lorsque t est donné, la variable e est fonction de t. On peut donc regarder e comme l'ordonnée d'une courbe dont t est l'abscisse; par conséquent lorsque t devient $t + dt$, e devient $e + de$; d'où il suit que l'espace parcouru dans le temps dt, doit être de. Cela posé, imaginons que lorsque le mobile est arrivé en B, la force accélératrice cesse tout-à-coup d'agir; le mobile continuera à se mouvoir avec la vitesse qu'il a acquise en B, et parcourra dans l'instant dt qui succédera à t, l'espace infiniment petit de; dans un instant suivant et égal à dt, il parcourra encore un espace de, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait parcouru un espace BC qui correspondra à l'unité de temps. Il faudra donc que cet espace BC se compose de de répété autant de fois que l'unité contient dt : or $\frac{1}{dt}$ exprime ce nombre de fois que l'unité renferme dt; par conséquent l'espace BC a pour expression $\frac{1}{dt} de$, ou plutôt $\frac{de}{dt}$, parce que la différentielle est prise par rapport à t; et comme nous avons représenté l'espace BC par v, nous aurons, pour déterminer la vitesse dans le mouvement varié,

$$v = \frac{de}{dt}.$$

295. On peut encore observer que l'espace parcouru de-
Fig. 154. puis l'expiration de t étant (fig. 154)

$Bb = de$ au bout du temps dt,
$Bb' = 2de$ au bout du temps $2dt$,
$Bb'' = 3de$ au bout du temps $3dt$,
. . . .
$BC = nde$ au bout du temps ndt;

comme le temps qui s'est écoulé depuis que le mobile était en B, se trouve, par hypothèse, égal à l'unité de temps, nous pouvons supposer $ndt = 1$, ce qui nous donne $n = \frac{1}{dt}$. Cette valeur étant mise dans l'expression nde de l'espace v parcouru dans l'unité de temps, nous aurons, comme précédemment,

$$v = \frac{de}{dt} \ldots (151).$$

296. Avant que de chercher l'équation qui donne la force accélératrice, faisons une remarque sur les forces. En général, une force F imprimant la vitesse v à un mobile, si cette force devient n fois plus grande, elle communiquera au mobile une vitesse qui sera aussi n fois plus grande. Cette proposition n'est pas incontestable, parce que la nature des forces ne nous étant pas connue, nous ne pouvons affirmer que lorsqu'une force devient double, par exemple, la vitesse qu'elle communiquera au mobile sera aussi double; mais c'est un fait qui nous est confirmé par l'expérience et duquel nous partirons. Ainsi, en adoptant cette hypothèse, que les forces appliquées à un même mobile soient proportionnelles à leurs vitesses, comme nous ne considérons que les rapports des forces, il nous suffira de prendre celui de leurs vitesses.

Nous chercherons donc à mesurer la force accélératrice par la vitesse qu'elle pourrait imprimer au mobile; mais cette vitesse variant à chaque instant, nous supposerons qu'après un temps t, la force accélératrice devienne tout-à-coup constante; alors nous prendrons pour mesurer cette force, la vitesse qu'elle engendrera dans l'unité de temps qui succédera à t.

A la vérité, cette force accélératrice constante imprimera au mobile une vitesse différente de celle que la véritable force accélératrice lui eût communiquée dans cette seconde de temps; mais c'est précisément ce qui résulte de notre hypo-

thèse, de ne considérer dans la force accélératrice que ce qu'elle est à l'expiration de t. Si dès ce moment nous la supposions variable, l'effet ne serait plus produit par la force accélératrice qui a lieu à l'expiration de t (*).

La définition précédente nous donne le moyen convenable de mesurer la force accélératrice; car il nous fait connaître dans quel rapport varie l'énergie de cette force dans des temps donnés. Par exemple, si au bout des temps t et t' la force accélératrice, devenue constante, communique au mobile, dans une seconde de temps, des vitesses représentées par les nombres 60 et 20; on conclura qu'au bout du temps t son intensité est triple de ce qu'elle était en t'.

297. Pour déduire de notre définition l'expression analytique de la force accélératrice, soit v la vitesse acquise par le mobile à l'expiration du temps t; alors au bout du temps $t+dt$, la vitesse deviendra $v+dv$; par conséquent dv sera la vitesse communiquée au mobile pendant le temps dt : or, si à la fin du temps t la force accélératrice devient tout-à-coup constante, elle communiquera au mobile, dans l'instant dt qui succédera à t, une vitesse encore égale à dv, et ainsi de suite; de sorte que depuis l'expiration de t, les vitesses communiquées au mobile dans les instans dt, $2dt$, $3dt$, etc., seront respectivement dv, $2dv$, $3dv$; par conséquent la vitesse acquise au bout de l'unité de temps qui succédera à t, sera dv répété autant de fois que cette unité contient dt. Ce nombre de fois étant exprimé par $\frac{1}{dt}$, il s'ensuit que $\frac{1}{dt}dv$, ou plutôt

(*) On pourrait rendre cela sensible par une comparaison : en regardant la force accélératrice comme un aimant qui varierait continuellement de masse, si nous voulons juger de l'intensité de cet aimant, au bout d'un temps donné, il faudra supposer que sa masse cesse de varier, et mesurer la vitesse qu'il pourrait communiquer au mobile dans une seconde de temps.



$\frac{dv}{dt}$ est l'effet de la force accélératrice dans l'unité de temps. Ainsi en représentant cette expression par φ, nous aurons cette seconde équation du mouvement varié,

$$\varphi = \frac{dv}{dt} \dots (152).$$

En représentant la force par l'effet qu'elle produit, nous dirons à l'avenir que φ est la force accélératrice.

298. On tire de cette équation

$$\varphi dt = dv,$$

ce qui nous apprend que lorsque la force accélératrice φ est donnée, on peut obtenir l'accroissement dv de la vitesse v, dans l'instant dt, en multipliant cette force accélératrice par l'élément de temps dt; et si en regardant la différentielle du temps comme constante, nous remplaçons dv par sa valeur tirée de l'équation (151), nous aurons cette seconde expression de la force accélératrice

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2} \dots (153).$$

299. Enfin, si l'on élimine dt entre les équations (151) et (152), on aura cette autre équation du mouvement varié,

$$\varphi de = v dv.$$

Du Mouvement uniformément varié.

300 La force accélératrice, par sa nature, imprimant à chaque instant une nouvelle impulsion au mobile, si ces impulsions sont constantes, le mobile, après le temps t, acquerra dans une seconde de temps, la même vitesse qu'après tout autre temps t'. Représentons cette vitesse par g, nous aurons

$$\varphi = g.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (152), on obtiendra

$$dv = gdt;$$

intégrant et désignant par a la constante à ajouter à l'intégrale, on aura

$$v = a + gt \ldots (154)\ (*).$$

Nous avons vu que la vitesse était aussi donnée par l'équation

$$v = \frac{de}{dt};$$

si l'on élimine v entre ces deux équations, on trouvera

$$de = (a + gt)\, dt:$$

intégrant, on aura

$$e = b + at + \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots (155).$$

Suivant que g sera positif ou négatif, le mouvement sera uniformément accéléré, ou uniformément retardé.

301. Si t est nul, on trouve $b = e$; donc b est l'espace parcouru par le mobile avant l'origine du temps.

(*) Voici comment on parvient encore à cette équation : Soit un corps qui, étant en mouvement, a acquis une vitesse a; s'il est tout-à-coup sollicité par une force accélératrice constante qui lui communique par seconde une vitesse g, la vitesse de ce corps sera

$a + g$ au bout d'une seconde,
$a + 2g$ au bout de deux secondes,
$a + 3g$ au bout de trois secondes,
....
$a + tg$ au bout de t secondes;

de sorte que si nous appelons v la vitesse que doit avoir le mobile au bout du temps t, nous aurons

$$v = a + gt.$$

A l'égard de a, nous avons vu que cette constante était la vitesse initiale ; on le prouverait encore au moyen de l'équation (154), dans laquelle on ferait $t = 0$.

302. Lorsque l'espace initial b et la vitesse initiale a sont nuls, les équations (154) et (155) deviennent

$$v = gt \ldots \; (156),$$
$$e = \tfrac{1}{2} gt^2 \ldots \; (157),$$

et le corps a dû se trouver en repos lorsqu'il a été mis en mouvement par la force accélératrice.

303. Soient e et e' les espaces parcourus dans les temps t et t', l'équation (157) nous donnera

$$e = \tfrac{1}{2} gt^2 \quad \text{et} \quad e' = \tfrac{1}{2} gt'^2 \ldots \; (158);$$

donc

$$e : e' :: t^2 : t'^2 \ldots \; (159).$$

Par conséquent les espaces qu'une force accélératrice constante fait parcourir, en différens temps, à un mobile qui part du repos, sont comme les carrés de ces temps.

On peut aussi comparer entre elles les vitesses v et v' acquises au bout des temps t et t' ; car d'après l'équation (156) on a dans ce cas,

$$v = gt, \quad v' = gt' ;$$

d'où l'on tire

$$v : v' :: t : t' ;$$

et en mettant à la place du rapport $t : t'$ sa valeur donnée par la proportion (159), on a

$$v : v' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'}.$$

Ces deux dernières proportions nous apprennent que les temps sont comme les vitesses ou comme les racines carrées des espaces parcourus pendant ces temps.

304. Si nous faisons $t = 1$, l'équation (157) nous donne

$$e = \tfrac{1}{2} g.$$

Dans ce cas, e est l'espace parcouru dans l'unité de temps par le mobile; donc le double de cet espace est l'expression g de la force accélératrice. On a trouvé, par exemple, que dans une seconde de temps un mobile, livré à l'action de la pesanteur, parcourait à la latitude de Paris, et à la température de la glace fondante,

$$15 \text{ pieds}, 097 = 4^m, 9044;$$

mettant cette valeur à la place de e dans l'équation précédente, on trouve

$$g = 30^p, 195 = 9^m, 809.$$

305. On parviendrait au même résultat par les considérations suivantes : soient $1_{,}$ et $1_{,,}$ deux secondes successives de temps, et supposons que le mobile, pendant la durée de la seconde $1_{,}$ qui représente t, ait parcouru 15 pieds; la force accélératrice se mesurera par l'espace que parcourrait le mobile dans la seconde $1_{,,}$, en vertu de la force accélératrice, devenue tout-à-coup constante à l'expiration de $1_{,}$: or, dans cet instant $1_{,}$, le mobile ayant parcouru 15 pieds, devrait, s'il n'était sollicité que par la vitesse qu'il a acquise, parcourir encore 15 pieds dans le temps $1_{,,}$; mais la force accélératrice étant supposée constante, doit produire sur le mobile, dans la seconde $1_{,,}$, le même effet qu'elle a produit dans la seconde $1_{,}$; elle fera donc parcourir encore au mobile 15 pieds dans le temps $1_{,,}$; d'où il suit que le mobile aura décrit 30 pieds dans la seconde $1_{,,}$; c'est cet espace qui mesurera la force accélératrice g.

306. L'équation (157) nous fait connaître l'espace parcouru dans un temps donné. Par exemple, si $t = 6''$, on a

$$e = \tfrac{1}{2}(30^p, 195) \times 36 = \tfrac{1}{2}(9^m, 809) \times 36,$$

et en exécutant les opérations indiquées, on trouve

$$e = 543^p, 51 = 176^m, 562;$$

ainsi un corps élevé de 176 mètres emploierait environ six secondes à tomber.

Si l'on cherchait la vitesse qui devrait animer ce corps au bout de ce temps, elle nous serait donnée par l'équation (154), dans laquelle on ferait

$$a = 0, \quad g = 9^m, 809, \quad t = 6'',$$

et l'on trouverait

$$v = 58^m, 854.$$

307. On pourrait aussi demander de quelle hauteur un corps devrait tomber pour avoir une vitesse donnée. Dans ce cas, on éliminerait t entre les équations

$$e = \tfrac{1}{2}gt^2, \quad v = gt,$$

et l'on trouverait

$$v = \sqrt{2eg} \ldots (160).$$

Par exemple, si l'on veut savoir quelle est la vitesse que doit avoir à l'instant de sa chute une balle de plomb qui tombe d'une hauteur de 20 mètres, on aura

$$v = \sqrt{40(9,809)} = \sqrt{392,36}.$$

On énonce ce dernier problème en disant que l'on cherche la vitesse due à une hauteur donnée.

308. Enfin on pourrait chercher le temps qu'un mobile demeurerait à tomber d'une hauteur e. Dans ce cas, en éliminant v entre les équations

$$v = gt \text{ et } v = \sqrt{2eg},$$

on trouverait

$$t=\sqrt{\frac{2c}{g}}.$$

309. Il nous reste à appliquer les équations du mouvement

$$\frac{de}{dt}=v \quad \text{et} \quad \varphi=\frac{dv}{dt} \ldots \ (161),$$

à la recherche du mouvement direct d'un corps, dans diverses hypothèses. Cette recherche se réduit à déterminer les relations qui existent entre le temps, l'espace et la vitesse; car, par exemple, si l'on peut parvenir à connaître l'espace et la vitesse en fonctions du temps, on sera en état de savoir en quel lieu se trouvera le corps au bout d'un temps donné, et la vitesse qu'aura ce mobile. Ainsi tout ce qui est relatif au mouvement de ce corps sera connu; c'est ce qui va faire la matière des chapitres suivans.

Du Mouvement que suit un corps lancé verticalement en sens contraire à celui de la pesanteur.

310. Si la pesanteur agissait seule sur un corps qui partirait du repos, nous avons vu que dans ce cas on aurait l'équation

$$\frac{dv}{dt}=g.$$

Cette équation nous donnerait $v=gt$ pour la vitesse que le mobile aurait acquise au bout du temps t : or, si l'on suppose qu'au lieu de partir du repos, il soit lancé verticalement en sens contraire à celui de la pesanteur avec une vitesse a, cette vitesse, au bout du temps t, devra être diminuée de toute celle que la pesanteur aura imprimée au mobile; par conséquent la vitesse du mobile, au bout du temps t, devra être représentée par $a-gt$; de sorte qu'en appelant v cette vi-

tesse, nous aurons

$$v = a - gt \ldots (162);$$

mettant pour v sa valeur $\frac{de}{dt}$, chassant le dénominateur et intégrant, nous trouverons

$$e = at - \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que nous supposons que l'espace initial est nul.

Cette seconde équation étant mise sous la forme suivante,

$$e = (a - \tfrac{1}{2} gt)\, t,$$

si l'on y substitue la valeur de t tirée de l'équation (162), on trouvera

$$e = \frac{a + v}{2} \times \frac{a - v}{g},$$

ou plutôt

$$e = \frac{a^2 - v^2}{2g} \ldots \quad (163).$$

311. Les équations (162) et (163) nous feront connaître toutes les propriétés du mouvement que nous considérons. En effet, l'équation (162) nous prouve que plus le temps t augmente, plus la vitesse v diminue; mais en considérant l'équation (163), on voit que plus la vitesse diminue, plus l'espace parcouru augmente; d'où il suit que le mobile diminue de vitesse en s'élevant verticalement; enfin la même équation (163) nous montre aussi que lorsque la vitesse devient nulle, le mobile atteint à sa plus grande hauteur; si nous appelons h cette hauteur, l'équation (163) nous donnera, en faisant $v = 0$,

$$h = \frac{a^2}{2g} \ldots (164).$$

Pour déterminer le temps qui correspond à cette plus grande hauteur, nous ferons aussi $v=o$ dans l'équation (162), et nous aurons

$$t=\frac{a}{g} \dots (165).$$

Si l'on veut avoir la vitesse due à la hauteur h, c'est-à-dire la vitesse qu'aura le mobile à l'instant de sa chute en descendant de cette hauteur, on mettra la valeur que nous venons de déterminer pour h, dans la formule

$$v=\sqrt{2eg}=\sqrt{2hg},$$

et l'on trouvera

$$v=\sqrt{a^2}=a;$$

par conséquent le corps a la même vitesse en descendant qu'en montant.

312. Si l'on demandait, par exemple, la plus grande hauteur à laquelle doit s'élever un corps lancé avec une vitesse de 81 mètres par seconde, on trouverait, au moyen des équations (164) et (165), que cette hauteur est de 334^m,43, et que le temps de l'ascension du mobile est de 8″,2.

313. Toute cette analyse peut s'appliquer au cas où le corps, au lieu de monter, descendrait; alors g serait de même signe que a, et l'on emploierait l'équation

$$v=a+gt.$$

Du mouvement vertical d'un corps, en ayant égard à la variation de la pesanteur.

314. La pesanteur est une force qui n'agit pas de la même manière dans tous les lieux. On a reconnu qu'elle diminuait lorsqu'on s'éloignait du centre de la terre, et qu'elle agissait

en raison inverse du carré de la distance, c'est-à-dire qu'à des distances du centre de la terre, représentées par les nombres 2, 3, 4, etc., elle devenait $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$ de ce qu'elle était à la distance 1; ainsi, quoique la pesanteur fasse parcourir $4^m,904$ en une seconde à un mobile qui est à la surface de la terre, si l'on s'éloigne de cette surface, ce mobile ne parcourra plus $4^m,904$ par seconde.

315. Considérons donc un mobile qui, partant du repos du point A (fig. 155), est parvenu en un point B, et cherchons d'abord la vitesse de ce mobile en ce point. Dans cette vue, nommons g la pesanteur à la surface M de la terre, φ la pesanteur au point B, r le rayon CM de la terre, x la distance de B en C; et pour simplifier les calculs, faisons AC $= 1$: la pesanteur agissant en raison inverse du carré de la distance, nous aurons Fig. 155.

$$g : \varphi :: x^2 : r^2;$$

d'où nous tirerons

$$\varphi = \frac{gr^2}{x^2}.$$

La force accélératrice est aussi exprimée (art. 297) par

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

ainsi on conclut des ces équations,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{x^2} \dots \quad (166).$$

D'une autre part, la vitesse étant égale à la différentielle de l'espace parcouru, divisée par celle du temps (art. 295), nous aurons pour la vitesse

$$v = \frac{d(1-x)}{dt},$$

ou plutôt

$$v = -\frac{dx}{dt} \dots \quad (167).$$

Multipliant cette équation terme à terme par l'équation (166), et supprimant le diviseur commun dt, nous trouverons

$$vdv = -gr^2 \frac{dx}{x^2},$$

et, en intégrant,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gr^2}{x} + C.$$

Nous déterminerons la constante en observant que quand $x = AC = 1$, $v = 0$, et nous trouverons

$$C = -gr^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, nous obtiendrons

$$\frac{v^2}{2} = gr^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) \dots \quad (168).$$

Cette équation détermine la vitesse qui a lieu en un point quelconque de la verticale.

316. Pour avoir le temps que le mobile a employé à parcourir l'espace AB, nous éliminerons v entre cette équation et l'équation (167), ce qui nous donnera

$$\frac{dx^2}{2dt^2} = gr^2\left(\frac{1}{x} - 1\right);$$

d'où nous tirerons

$$dt^2 = \frac{1}{2gr^2} \times \frac{dx^2}{\frac{1}{x} - 1};$$

et par conséquent,

$$dt = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{2g}} \times \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}};$$

et en intégrant,

$$t = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \ldots \ (169).$$

Pour effectuer l'intégration qui n'est qu'indiquée, nous trouverons, en réduisant les fractions au même dénominateur,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \ldots \ (170).$$

Nous ferons évanouir le radical du dénominateur en supposant

$$1 - x = z^2.$$

On tire de cette équation

$$dx = -2zdz, \quad \sqrt{1-x} = z, \quad \sqrt{x} = \sqrt{1-z^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, nous obtiendrons

$$\int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -2 \int dz \sqrt{1-z^2} \ldots \ (171).$$

Intégrant par parties, nous aurons

$$\int dz \sqrt{1-z^2} = z \sqrt{1-z^2} + \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

D'une autre part, multipliant et divisant $\int dz \sqrt{1-z^2}$ par $\sqrt{1-z^2}$, on a cette équation identique

$$\int dz \sqrt{1-z^2} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ajoutant ces équations et divisant par 2, on trouve

$$\int dz \sqrt{1-z^2} = \tfrac{1}{2} z \sqrt{1-z^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2} z \sqrt{1-z^2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}(\sin = z);$$

donc

$$-2\int dz \sqrt{1-z^2} = -z\sqrt{1-z^2} - \operatorname{arc}(\sin = z).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (171), on obtiendra l'intégrale de l'équation (170), et par conséquent l'équation (169) deviendra

$$t = \mp \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{2g}} [z\sqrt{1-z^2} + \operatorname{arc}(\sin = z)] \ldots \quad (172).$$

Il n'y a point de constante à ajouter, parce que lorsque $t = 0$, on a $x = 1$; alors l'équation $1 - x = z^2$ nous donne $z = 0$, hypothèse qui fait évanouir le second membre de l'équation (172); et comme le temps est essentiellement positif, nous ne prendrons que le signe inférieur des deux signes qui affectent la valeur de t; observant ensuite que z^2 n'est autre chose que l'expression analytique $1 - x$ de l'espace parcouru AB que nous représenterons par e, l'équation précédente nous donnera, pour déterminer le temps en fonction de l'espace,

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{2g}} [\sqrt{e}\sqrt{1-e} + \operatorname{arc}(\sin = \sqrt{e})].$$

317. Cette dernière équation se simplifie beaucoup dans l'hypothèse où les distances AB et AM seraient très petites à l'égard de AC et de MC; car alors on peut, sans erreur sensible, remplacer $\sqrt{1-e}$ par l'unité, et l'arc par le sinus; c'est-à-dire mettre $\sqrt{e}$ à la place de arc sin $\sqrt{e}$, et en changeant r en 1, on obtiendra

$$t = \sqrt{\frac{1}{2g}} \times 2\sqrt{e};$$

élevant cette équation au carré, on obtient

$$t^2 = \frac{1}{2g} \times 4e;$$

réduisant et tirant les valeurs de e, on trouve

$$e = \frac{1}{2}gt^2;$$

ce qui nous apprend que, dans cette hypothèse, le mouvement s'effectue comme si la pesanteur n'était pas variable.

Du Mouvement vertical dans les milieux résistans.

318. On a trouvé que la résistance qu'éprouve un corps qui se meut dans un fluide, était proportionnelle au carré de la vitesse qui anime ce corps. Ainsi en appelant m cette résistance lorsque le mobile est animé de l'unité de vitesse, cette résistance deviendra mv^2 quand il aura acquis la vitesse v. Cette force mv^2 étant contraire à celle de la pesanteur que nous supposerons constante, nous aurons

$$\varphi = g - mv^2;$$

mettant pour φ sa valeur $\frac{dv}{dt}$, nous aurons

$$\frac{dv}{dt} = g - mv^2,$$

d'où nous tirerons

$$dt = \frac{dv}{g - mv^2} \ldots \quad (173).$$

Pour intégrer cette équation, nous remarquerons qu'en décomposant le dénominateur en facteurs, nous avons

$$g - mv^2 = (\sqrt{g} + v\sqrt{m})(\sqrt{g} - v\sqrt{m}).$$

Nous supposerons, d'après la méthode des fractions rationnelles (*Élémens de Calcul intégral*, art. 295),

$$\frac{dv}{g - mv^2} = dv\left(\frac{A}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}} + \frac{B}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right) \ldots (174);$$

réduisant le second membre au même dénominateur, supprimant les dénominateurs et égalant entre eux les coefficiens des mêmes puissances de v, nous trouverons

$$A = B = \frac{1}{2\sqrt{g}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (174), nous aurons

$$\frac{dv}{g - mv^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{dv}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}} + \frac{dv}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right).$$

Multiplions et divisons le second membre de cette équation par $\sqrt{m}$, l'équation (173) devient, au moyen de cette valeur,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{m}.\sqrt{g}}\left(\frac{dv\sqrt{m}}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}} + \frac{dv\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right),$$

et en intégrant, on obtient

$$t = \frac{1}{2\sqrt{mg}}\left[\log(\sqrt{g} + v\sqrt{m}) - \log(\sqrt{g} - v\sqrt{m})\right] + C,$$

ou

$$t = \frac{1}{2\sqrt{mg}} \log \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}} \ldots (175).$$

Nous supprimons la constante, parce que $t = 0$ quand $v = 0$.

319. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (175) par $2\sqrt{mg}$, et le premier seulement par le logarithme de la base ε du système népérien, logarithme qui, comme on le sait, équivaut à l'unité, on trouve

$$2t\sqrt{mg}\log\varepsilon = \log\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}},$$

ou

$$\log \varepsilon^{2t\sqrt{mg}} = \log \frac{\sqrt{g}+v\sqrt{m}}{\sqrt{g}-v\sqrt{m}};$$

passant aux nombres, on a

$$\varepsilon^{2t\sqrt{mg}} = \frac{\sqrt{g}+v\sqrt{m}}{\sqrt{g}-v\sqrt{m}};$$

et en écrivant ainsi cette équation,

$$\frac{1}{\varepsilon^{2t\sqrt{mg}}} = \frac{\sqrt{g}-v\sqrt{m}}{\sqrt{g}+v\sqrt{m}} \dots \quad (176),$$

on voit que plus t augmente, plus le terme $\varepsilon^{2t\sqrt{mg}}$ s'approche de l'infini ; par conséquent plus cette équation tend à se réduire à

$$0 = \sqrt{g}-v\sqrt{m} \dots \quad (177).$$

C'est ce qui arriverait effectivement si t devenait infini ; car alors le premier membre de l'équation (176) étant nul, on aurait le droit de supprimer le diviseur commun $\sqrt{g}+v\sqrt{m}$.

L'équation (177) nous donne

$$v = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}} = \text{constante}.$$

Cette valeur de v qui a lieu lorsque $t=\infty$, nous apprend que plus t s'augmente, plus la vitesse tend à devenir constante.

320. Pour avoir l'espace en fonction de la vitesse, nous multiplierons terme à terme les équations

$$\frac{dv}{dt} = g - mv^2, \quad v = \frac{de}{dt},$$

et nous trouverons

$$vdv = (g - mv^2)\, de;$$

d'où nous tirerons

$$de = \frac{vdv}{g - mv^2} \dots \quad (178).$$

Le numérateur de cette fraction étant la différentielle du dénominateur à une constante près, nous parviendrons à l'intégrer en faisant (*Élém. de Calcul intégr.*, art. 271)

$$g - mv^2 = z.$$

Différentiant cette équation, nous trouverons

$$vdv = -\frac{dz}{2m}.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (178), nous la changerons en

$$de = -\frac{dz}{2mz}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$e = -\frac{1}{2m}\log z + C,$$

ou, en mettant la valeur de z,

$$e = -\frac{1}{2m}\log(g - mv^2) + C.$$

Je détermine C en faisant $e = 0$ et $v = 0$, ce qui me donne

$$C = \frac{1}{2m}\log g;$$

substituant cette valeur de C, je trouve

$$e = -\frac{1}{2m}[\log(g - mv^2) - \log g],$$

et en observant que la différence des logarithmes de deux nombres est égale au logarithme de leur quotient, j'obtiens enfin

$$e = -\frac{1}{2m}\log\left(1 - \frac{mv^2}{g}\right).$$

Du Mouvement des corps assujétis à glisser le long des plans inclinés.

321. Proposons-nous de déterminer le mouvement d'un corps qui glisserait sur un plan incliné. Il est d'abord évident que le centre de gravité de ce corps se meut sur un plan parallèle au plan incliné. Ainsi la question peut se ramener à celle du mouvement d'un point matériel sur un plan incliné.

Soient donc (fig. 156) m ce point matériel, et g la vitesse Fig. 156
due à l'action de la pesanteur. Cette vitesse sera représentée par la droite mB que décrirait le point m dans une seconde de temps s'il agissait librement; mB aura pour composantes, suivant une direction perpendiculaire au plan incliné, et suivant ce plan, les droites mC, mD; la première de ces composantes sera détruite par la résistance du plan incliné, et la seconde fera glisser le point m sur ce plan.

Cela posé, les forces étant proportionnelles aux vitesses qu'elles communiquent à un mobile dans le même temps, si nous appelons g' la vitesse qui sollicite le mobile dans une seconde de temps, suivant le plan incliné, nous aurons la proportion

$$mB : mD :: g : g'.$$

Or, nous avons vu, art. 246, que le rapport de mB à mD était le même que celui de la longueur du plan incliné à la hauteur. Ainsi, en appelant h la hauteur du plan incliné, et h' sa longueur, nous aurons encore

$$h' : h :: g : g';$$

d'où l'on tirera

$$g' = \frac{hg}{h'} \ldots (179).$$

322. Cette équation nous fait voir que la vitesse g' n'est autre chose que la vitesse g qui anime le mobile lorsqu'il est

libre, multipliée par le rapport constant $\frac{h}{h'}$. Concluons que le mobile est entraîné le long du plan incliné par une force accélératrice g' qui ne diffère de celle de la pesanteur que par l'intensité. Donc, si nous appelons t' le temps que le mobile emploiera à descendre de m en A le long du plan incliné, comme l'espace parcouru sera h', il y aura entre g', h' et t' la même relation que nous avions entre g, h et t dans la théorie du mouvement uniformément accéléré ; par conséquent nous aurons

$$h' = \tfrac{1}{2} g' t'^2 \ldots \text{ (180)},$$

et la vitesse v' qui animera le mobile au point A qui correspond à t', sera

$$v' = g't' ;$$

en éliminant le temps, nous trouverons

$$v' = \sqrt{2g'h'}.$$

Substituant dans cette équation la valeur g' (équation 179), nous trouverons, en réduisant,

$$v' = \sqrt{2gh}.$$

L'expression de cette vitesse étant indépendante de l'angle mAE que fait le plan incliné avec l'horizon, il en résulte que
Fig. 157. si différens mobiles partis du point m (fig. 157), glissent sur les plans inclinés mA, mA', mA'', etc., ils auront la même vitesse lorsqu'ils seront parvenus aux points A, A', A'', etc., situés sur le plan horizontal.

323. Observons que, quoique les vitesses d'un mobile soient égales aux points A et E, il n'en est pas de même des temps; car soient t et t' les temps qu'il emploie à parcourir les droites mE et mA, ces temps sont donnés par les équations

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t' = \sqrt{\frac{2h'}{g'}} ;$$

or, on a

$$h < h',$$

$$g > g', \quad \text{ou} \quad \frac{1}{g} < \frac{1}{g'};$$

on déduit de ces inégalités celle-ci,

$$\frac{2h}{g} < \frac{2h'}{g'};$$

ce qui nous apprend que la valeur de t' surpasse celle de t.

324. Le mouvement d'un corps sur le plan incliné, nous offre encore cette propriété remarquable du cercle : c'est qu'un mobile demeure autant de temps à glisser le long d'une corde AC (fig. 158) qu'à parcourir le diamètre vertical AB. En effet, l'équation (180) nous donne Fig. 158.

$$t' = \sqrt{\frac{2h'}{g'}};$$

mettant pour g' sa valeur $\frac{hg}{h'}$, cette équation devient

$$t' = \sqrt{\frac{2h'^2}{gh}} \dots (181).$$

Or, si nous appelons d le diamètre AB du demi-cercle ACB, la corde AC étant moyenne proportionnelle entre ce diamètre AB et le segment AD, nous aurons,

$$AB : AC :: AC : AD,$$

ou

$$d : h' :: h' : h;$$

par conséquent

$$h'^2 = hd.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (181), nous trouverons, en réduisant,

$$t' = \sqrt{\frac{2d}{g}};$$

or, c'est précisément la valeur qu'on trouverait pour t, au moment où le corps tombant du point A, arriverait en B; car la hauteur AB étant exprimée par d, il suffirait de changer e en d dans l'équation $e = \frac{1}{2}gt^2$ pour que cette équation donnât la valeur du temps t de la chute.

Du Mouvement curviligne en général; équations de la trajectoire que décrit un point matériel libre, et détermination de la vitesse; du cas où le mobile est soumis à une force d'attraction dirigée vers un point fixe; du principe des aires; et du cas où les forces étant dirigées vers des centres fixes, sont des fonctions des distances du centre d'attraction du mobile aux centres fixes.

325. Jusqu'à présent nous avons supposé que le mouvement s'effectuait en ligne droite; mais s'il était curviligne, il ne suffirait pas de pouvoir dire qu'au bout d'un temps donné, le mobile serait susceptible d'avoir parcouru tel espace, ou d'être animé de telle vitesse; il faudrait, pour connaître entièrement son mouvement, que l'on fût en état d'assigner la courbe suivant laquelle il a dû se mouvoir, et de savoir en quel point de cette courbe il est au bout du temps donné.

326. Pour résoudre ce problème, nous avons d'abord besoin d'employer un nouveau principe; c'est celui du parallélogramme des vitesses que nous allons démontrer. Voici en quoi il consiste : Si, dans l'unité de temps, deux forces P et
Fig. 159. Q (fig. 159) communiquent à un point matériel m des vitesses mB et mC, la résultante R de P et de Q lui communiquera, dans la même unité de temps, une vitesse mD qui sera la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses

mB et mC. En effet, comme il est permis de représenter toute force donnée par une partie quelconque de sa direction, la force Q pourra être représentée par mC; alors la force P le sera par mB; car les vitesses sont proportionnelles aux forces. Or, en considérant mBDC comme le parallélogramme des forces P et Q, la diagonale mD de ce parallélogramme représentera en intensité la résultante R de P et de Q. Il s'agit donc de déterminer la vitesse que R est capable de communiquer au mobile, et de prouver que cette vitesse est égale à la résultante du parallélogramme dont les côtés seraient les vitesses produites par les forces P et Q. Pour cet effet, soit x la vitesse que R est en état de communiquer au point m; les vitesses étant proportionnelles aux forces, nous aurons

$$P : R :: mB : x.$$

Mais le parallélogramme des forces nous donne

$$P : R :: mB : mD;$$

on tire de ces proportions,

$$mB : mD :: mB : x;$$

donc

$$x = mD :$$

par conséquent on peut regarder la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses, comme égale à la vitesse que R peut communiquer au mobile.

327. Le parallélépipède des vitesses est une conséquence immédiate du parallélogramme des vitesses; car soient (fig. 160) P, Q et R trois forces qui communiquent les vitesses mp, mq et mr à un point matériel m; composons les vitesses mp et mq en une seule mp'; il résulte de l'article précédent que cette vitesse sera la même que celle qui serait communiquée à m par la résultante P′ des forces P et Q; de même la résultante mr des vitesses mp' et mr représentera en intensité la Fig. 160.

vitesse imprimée par S, résultante des deux forces P' et R, ou des trois forces P, Q et R; donc la diagonale *ms* du parallélépipède des vitesses sera la vitesse communiquée à *m* par la résultante des forces P, Q et R.

328. Considérons maintenant de quelle manière un point matériel, animé d'une vitesse variable, peut décrire une courbe. Pour cela, supposons d'abord que le point matériel
Fig. 161. *m* (fig. 161) étant en repos, cède à une impulsion instantanée qui lui fasse décrire la droite *m*A dans le temps θ, et qu'au bout de ce temps il reçoive une seconde impulsion capable de lui faire décrire dans un second temps θ la droite AB, le mobile n'obéira pas uniquement à la force qui l'entraîne dans cette direction AB, parce qu'en vertu de la loi d'inertie, il doit durant θ parcourir AC = A*m*; mais il suivra la diagonale AD du parallélogramme ABCD. S'il reçoit en D une nouvelle impulsion capable de lui faire parcourir l'espace DG dans un troisième temps θ, il décrira de même la diagonale DF du parallélogramme construit sur DG et sur le prolongement DE de AD, et ainsi de suite; de sorte qu'au bout d'un temps composé de *n* fois θ, le mobile aura décrit un polygone d'un nombre *n* de côtés.

D'après ce qui précède, la vitesse étant la même tant que le mobile est sur le même côté, il suit de là que si, lorsqu'il est arrivé à l'extrémité du dernier côté, il ne reçoit pas une nouvelle impulsion, il s'échappera suivant la direction de ce côté.

Si l'on suppose que le temps θ soit infiniment petit, les impulsions se succéderont immédiatement, et le polygone se changera en courbe; alors si la force accélératrice cesse d'agir, le point matériel s'échappera suivant la tangente à la courbe.

Dans la même hypothèse de θ infiniment petit, θ se change en *dt* en même temps que le côté du polygone devient l'élé-

ment de la courbe; par conséquent, pour avoir la vitesse qui (art. 293) est l'espace parcouru dans l'unité de temps, suivant la tangente, dans l'hypothèse où la force accélératrice cesserait tout à coup d'agir, il faudra répéter ds autant de fois que dt est contenu dans l'unité de temps; c'est-à-dire multiplier ds par $\frac{1}{dt}$, ce qui donnera pour l'expression de la vitesse

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

329. Revenons au mobile qui, par des accroissemens de vitesse aux points m', m'', m''', etc. (fig. 162), parcourt le polygone $mm'm''m'''$, etc. Soient v, v', v'', v''', etc., les vitesses qu'il reçoit aux points m, m', m'', m''', etc., et θ, θ', θ'', θ''', etc., les temps qu'il emploiera à parcourir les côtés mm', $m'm''$, $m''m'''$, etc. Comme, par hypothèse, la vitesse est constante tant que le mobile ne change pas de côté, nous aurons, par la nature du mouvement uniforme, Fig. 162.

$$mm' = v\theta, \quad m'm'' = v'\theta', \quad m''m''' = v''\theta'';$$

par conséquent le contour du polygone $mm'm''$, etc., sera exprimé par

$$v\theta + v'\theta' + v''\theta'' + \text{etc.}$$

Si l'on projette les côtés de ce polygone sur les axes coordonnés, et qu'on nomme α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', etc., les angles formés par les vitesses v, v', v'', etc., avec les axes coordonnés, ces vitesses auront pour projections (*note neuvième*),

$$\begin{array}{llll} v\cos\alpha, & v'\cos\alpha', & v''\cos\alpha'', & \text{etc., sur l'axe des } x, \\ v\cos\beta, & v'\cos\beta', & v''\cos\beta'', & \text{etc.; sur l'axe des } y, \\ v\cos\gamma, & v'\cos\gamma', & v''\cos\gamma'', & \text{etc., sur l'axe des } z. \end{array}$$

Par conséquent la projection $nn'n''n'''$, etc., du polygone $mm'm''m'''$, etc., sur l'axe des x, sera exprimé par

$$v\cos\alpha\theta + v'\cos\alpha'\theta' + v''\cos\alpha''\theta'' + \text{etc.}\ldots \quad (182).$$

On voit donc qu'en même temps que le point m parcourt le polygone $mm'm''m'''$, etc., sa projection n parcourt nécessairement l'espace $nn'n''n'''$, etc. Or, si cette projection était seulement sollicitée par une force X dirigée suivant l'axe des x, et qui fût telle que le point n décrivît dans les temps θ, θ', θ'', etc., les droites nn', $n'n''$, $n''n'''$, etc., avec les vitesses $v\cos\alpha$, $v'\cos\alpha'$, $v''\cos\alpha''$, etc., le chemin que cette projection parcourrait sur l'axe des x serait représenté par

$$v\cos\alpha\theta + v'\cos\alpha'\theta' + v''\cos\alpha''\theta'' + \text{etc.}\ldots \quad (183).$$

L'identité de l'expression (182) à cette dernière nous apprend que lorsque le point m est transporté dans l'espace, sa projection se meut sur l'axe des x comme si les deux autres composantes de la vitesse n'existaient pas; car dans le calcul qui nous a conduit à l'expression (183), nous n'avons fait entrer en considération rien de ce qui est relatif à ces deux composantes.

Ce que nous disons de l'axe des x pouvant s'appliquer aux deux autres, et le polygone se changeant en courbe lorsque le nombre de ses côtés est infini, concluons que lorsqu'un point matériel, sollicité par une force accélératrice, décrit une courbe dans l'espace, une de ses projections se meut comme si les deux autres n'existaient pas. Ainsi en nommant X, Y, Z les composantes de la force accélératrice φ, suivant les axes des coordonnées, nous pouvons regarder X, Y, Z comme des forces accélératrices qui imprimeraient aux projections du mobile des mouvemens indépendans de l'ensemble des deux autres.

330 Pour déterminer les expressions analytiques de ces forces accélératrices, il faut remarquer que lorsque le point matériel parcourt l'espace ds, ses projections décrivent les espaces dx, dy, dz; par conséquent les vitesses des projections suivant les axes coordonnés seront respectivement $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; et comme ces forces accélératrices sont les coef-

ficiens différentiels des vitesses, pris par rapport au temps, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z\end{aligned}\right\}\ldots\ (184).$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer le mouvement en ligne courbe d'un point matériel, ou celui d'un mobile, puisqu'on peut regarder la masse du mobile comme concentrée à son centre de gravité.

331. Lorsque les fonctions X, Y, Z seront données par la nature du problème, si l'on peut obtenir les intégrales des équations (184), ces intégrales ne devant contenir d'autres variables que x, y, z et t, on aura trois équations qui, par l'élimination de t, en donneront deux autres entre les variables x, y, z; ces équations seront celles de la *trajectoire*, ou *courbe engendrée par les forces accélératrices*.

Si toutes les forces sont dans un plan qu'on prendra pour celui des x, y, la variable z n'existera pas, et il suffira d'employer les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y.$$

Lorsque, par la nature du problème, on aura déterminé X et Y, si l'on peut obtenir les intégrales de ces équations, elles ne pourront contenir d'autres variables que x, y et t; alors en éliminant le temps, on trouvera une équation que nous représenterons par

$$y=fx:$$

cette équation ne renfermant que deux variables, la trajectoire sera une courbe plane.

332. Nous avons vu que la vitesse du mobile était donnée par l'équation

$$v = \frac{ds}{dt}:$$

or, l'élément ds d'un arc de courbe dans l'espace pouvant être considéré comme une droite infiniment petite qui aurait dx, dy et dz pour projections sur les axes coordonnés, cette droite aura pour expression (art. 46)

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}:$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on a

$$v = \frac{1}{dt}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

ou plutôt, en remarquant que toutes les différentielles se prennent par rapport au temps,

$$v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} \ldots (185).$$

A l'égard des angles que la vitesse fait avec les axes, soient α, 6, γ ces angles, ils seront déterminés par les équations

$$v \cos\alpha = \frac{dx}{dt},$$

$$v \cos 6 = \frac{dy}{dt},$$

$$v \cos\gamma = \frac{dz}{dt}.$$

333. Il existe une méthode plus élégante pour déterminer la vitesse. En effet, si l'on multiplie les équations (184), la première par $2dx$, la seconde par $2dy$, et la troisième par $2dz$, et qu'on ajoute les résultats, on obtiendra

$$\frac{2dz \cdot d^2z + 2dy \cdot d^2y + 2dx \cdot d^2x}{dt^2} = 2(Zdz + Ydy + Xdx);$$

observant que le premier membre de cette équation n'est autre chose que la différentielle de $dz^2 + dy^2 + dx^2$, divisée par dt^2, on aura

$$\frac{d(dz^2+dy^2+dx^2)}{dt^2} = 2(\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx);$$

remplaçant $dz^2 + dy^2 + dx^2$ par ds^2, et regardant dt comme constant, on trouvera en intégrant,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2\int(\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx) + \mathrm{C},$$

ou, en mettant la valeur v de $\frac{ds}{dt}$,

$$v^2 = 2\int(\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx) + \mathrm{C}\ldots \quad (186).$$

334. L'expression de la vitesse dépend donc de l'intégration de la formule

$$\int(\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx)\ldots \quad (187).$$

Lorsque cette intégration est possible, en l'effectuant, on parviendra à mettre l'équation (186) sous la forme

$$v^2 = 2\mathrm{F}(x, y, z) + \mathrm{C}\ldots \quad (188).$$

Pour déterminer la constante, il faudra connaître la vitesse du mobile à l'un des points de la trajectoire. Ainsi, lorsqu'on sait que V est la vitesse qui correspond aux coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = c$, on a

$$\mathrm{V}^2 = 2\mathrm{F}(a, b, c) + \mathrm{C}.$$

Tirant de cette équation la valeur de C et la substituant dans l'équation (188), on obtiendra

$$v^2 - \mathrm{V}^2 = 2\mathrm{F}(x, y, z) - 2\mathrm{F}(a, b, c).$$

335. On peut parvenir à intégrer la formule (187) dans le cas où le mobile est soumis à une force d'attraction dirigée vers un point fixe. Pour le démontrer, les forces qui agissent sur le mo-

bile se réduisant, dans ce cas, à une résultante unique R qui passe par le centre fixe, et qui, agissant suivant CM, pourra être représentée par une partie quelconque CD de cette ligne
Fig. 163. (fig. 163); prenons ce centre pour origine, et nommons λ sa distance au point M, et α, 6, γ les angles que $CM = \lambda$ fait avec les axes coordonnés, la résultante R formant les mêmes angles, nous aurons

$$X = R\cos\alpha,\quad Y = R\cos 6,\quad Z = R\cos\gamma,$$

et par conséquent,

$$\frac{X}{Y} = \frac{\cos\alpha}{\cos 6},\quad \frac{Y}{Z} = \frac{\cos 6}{\cos\gamma},\quad \frac{Z}{X} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} \ldots (189).$$

Or, si nous appelons x, y, z les coordonnées du point M où le mobile est situé, nous aurons

$$x = \lambda\cos\alpha,\quad y = \lambda\cos 6,\quad z = \lambda\cos\gamma.$$

On tire de ces équations les proportions

$$x : y : z :: \cos\alpha : \cos 6 : \cos\gamma;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\cos\alpha}{\cos 6} = \frac{x}{y},\quad \frac{\cos 6}{\cos\gamma} = \frac{y}{z},\quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{z}{x};$$

substituant ces valeurs dans les équations (189), on aura

$$yX - xY = 0,\quad zY - yZ = 0,\quad xZ - zX = 0.$$

Si dans ces équations on met pour X, Y, Z leurs valeurs données par les équations (184), on trouvera

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Multipliant par dt la première de ces équations, intégrant par parties et réduisant, on trouvera

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = \text{C} \ldots (190).$$

Opérant de la même manière pour les autres équations multipliées par dt, on obtiendra ces résultats

$$ydx - xdy = \text{C}dt,$$
$$zdy - ydz = \text{C}'dt,$$
$$xdz - zdx = \text{C}''dt.$$

Multipliant chacune de ces équations par la variable qu'elle ne renferme pas, et les ajoutant, il viendra

$$o = (\text{C}z + \text{C}'x + \text{C}''y)dt,$$

ou plutôt

$$\text{C}z + \text{C}'x + \text{C}''y = o.$$

Cette équation étant celle d'un plan qui passe par l'origine, c'est-à-dire par le centre d'attraction, on voit que le mobile se meut dans une courbe plane. C'est pourquoi, si l'on résout de nouveau le problème en plaçant la trajectoire dans le plan des x, y, nous ne ferons pas usage de l'équation $\text{Z} = \frac{d^2z}{dt^2}$, ni des quantités Z et z qui sont nulles; nous aurons seulement à intégrer l'équation (190) que nous écrirons ainsi

$$ydx - xdy = \text{C}dt,$$

et l'on en déduira

$$\int (ydx - xdy) = \text{C}t + \text{C}' \ldots (191).$$

Pour déterminer cette intégrale, nous remarquerons que ydx étant l'élément d'une surface courbe, nous pourrons supposer que cette surface est comprise entre les abcisses $x = o$ et $x = \text{CP}$ (fig. 164); alors l'expression $\int ydx$ sera représentée Fig. 164.
par LCPM. Si nous retranchons de cette surface le triangle

CPM, il nous restera

$$secteur\ LCM = aire\ LCPM - triangle\ CPM,$$

ou

$$secteur\ LCM = \int y dx - \frac{xy}{2};$$

différentiant et réduisant, on trouvera

$$d.\ secteur\ LCM = \frac{y dx - x dy}{2};$$

intégrant de nouveau et faisant disparaître le diviseur 2, on aura

$$2\ secteurs\ LCM = \int (y dx - x dy);$$

par conséquent l'équation (191) revient à celle-ci,

$$2\ secteurs\ LCM = Ct\ldots \quad (192).$$

Nous supprimons la constante C', parce que nous pouvons supposer que le temps commence lorsque le mobile est en L, cas où le secteur est nul.

Faisons $C = 2A$, l'équation (192) deviendra

$$secteur\ LCM = At;$$

ce qui nous apprend que lorsque le mobile, sollicité par une force qui l'attire vers un centre C, décrit la courbe LM, la surface du secteur LCM est proportionnelle au temps que le mobile emploie à parcourir la courbe. Cette propriété est connue sous le nom de *principe des aires*.

336. La formule (187) est toujours intégrable lorsque les forces étant dirigées vers des centres fixes, sont des fonctions des distances du centre d'attraction du mobile à ces centres.

Fig. 165. Pour le démontrer, soit M (fig. 165) le centre d'attraction d'un mobile qui serait attiré par des forces P, P', P'', etc., vers les centres fixes C, C', C'', etc.; nommons

x, y, z les coordonnées du point M,
a, b, c les coordonnées du centre C,
a', b', c' les coordonnées du centre C',
a'', b'', c'' les coordonnées du centre C'',
etc. etc.

p, p', p'', etc., les distances CM, C'M, C''M, etc.,
α, β, γ les angles formés par p avec les axes coordonnés,
α', β', γ' les angles formés par p' avec les axes coordonnés,
$\alpha'', \beta'', \gamma''$ les angles formés par p'' avec les axes coordonnés,
etc. etc.

La résultante de toutes les forces attractives aura pour composantes, suivant les axes coordonnés,

$$\left.\begin{array}{l} X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.}, \\ Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.}, \\ Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (193).$$

La projection de la droite CM sur l'axe des x étant représentée dans la figure 165 par BD, nous avons Fig. 165.

$$BD = AB - AD;$$

et en observant que AB et AD ne sont autre chose que les coordonnées x et a des points M et C sur l'axe des x, et que BD étant la projection de MC sur ce même axe, a pour expression analytique $p\cos\alpha$; on trouvera, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$p\cos\alpha = x - a;$$

ce que nous disons de la projection de MC sur l'un des axes pouvant s'appliquer aux autres, nous aurons, pour déterminer les angles α, β, γ, les équations

$$p\cos\alpha = x - a, \quad p\cos\beta = y - b, \quad p\cos\gamma = z - c.$$

De même les angles α', β', γ', etc., $\alpha'', \beta'', \gamma''$, etc., seront

donnés par les équations

$$p'\cos\alpha' = x - a',\quad p'\cos6' = y - b',\quad p'\cos\gamma' = z - c',$$
$$p''\cos\alpha'' = x - a'',\quad p''\cos6'' = y - b'',\quad p''\cos\gamma'' = z - c'',$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

par conséquent, en éliminant ces angles, les équations (193) deviendront

$$X = P\frac{(x-a)}{p} + P'\frac{(x-a')}{p'} + P''\frac{(x-a'')}{p''} + \text{etc.},$$
$$Y = P\frac{(y-b)}{p} + P'\frac{(y-b')}{p'} + P''\frac{(y-b'')}{p''} + \text{etc.},$$
$$Z = P\frac{(z-c)}{p} + P'\frac{(z-c')}{p'} + P''\frac{(z-c'')}{p''} + \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans la formule (187), on obtiendra

$$\int(X dx + Y dy + Z dz)$$
$$= \int P\left(\frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz\right)$$
$$+ \int P'\left(\frac{x-a'}{p'}dx + \frac{y-b'}{p'}dy + \frac{z-c'}{p'}dz\right) + \text{etc.} \ldots (194).$$

Or, les distances du point M aux centres C, C', C'', etc., étant données par les équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = p^2,$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 = p'^2, \text{ etc.},$$

nous trouverons, après avoir différentié,

$$\frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz = dp,$$
$$\frac{x-a'}{p'}dx + \frac{y-b'}{p'}dy + \frac{z-c'}{p'}dz = dp', \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (194), nous obtien-

drons

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\int(Pdp+P'dp'+P''dp''+\text{etc.})\ldots(195);$$

et comme, par hypothèse, P, P', P'', etc., sont des fonctions de p, de p', de p'', etc., l'expression $Pdp+P'dp'+$etc., ne contiendra qu'une variable dans chacun de ses termes, et son intégration sera ramenée aux quadratures.

Observons que les facteurs dp, dp', etc., pourraient être négatifs si quelques-unes des expressions $x-a$, $y-b$, $z-c$; $x'-a$, $y'-b$, etc., devenaient $a-x$, $b-y$, $c-z$; $a-x'$, $b-y'$, etc.

337. Pour donner une application de ce théorème, cherchons à déterminer la vitesse dans le mouvement d'un corps qui serait attiré vers un seul centre fixe par une force P qui agirait en raison inverse du carré de la distance du centre d'attraction du mobile au point fixe. Plaçons l'axe des z sur la direction de cette force; et, pour qu'elle augmente en même temps que z, disposons les axes coordonnés comme dans la figure 166, nous aurons Fig. 166.

$$p=AC-AM=c-z;\quad \text{donc}\quad dp=-dz.$$

Nommons g l'effet de la force P à la distance r du point C, et P son effet à la distance p, nous aurons la proportion

$$g:P::\frac{1}{r^2}:\frac{1}{p^2},$$

d'où nous tirerons

$$P=\frac{gr^2}{p^2};$$

la valeur de dp étant négative, Pdp devra être remplacé par $-\frac{gr^2}{p^2}dp$; intégrant, nous réduirons l'équation (195) à

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\frac{gr^2}{p}.$$

Substituant cette valeur dans la formule (186), nous obtiendrons

$$v^2 = C + 2\frac{gr^2}{p} \ldots \quad (196).$$

Pour déterminer la constante, nous supposerons que le mobile M commence à se mouvoir en un point dont la distance p au centre C soit a : alors la vitesse sera nulle en ce point; et nous aurons

$$o = C + 2\frac{gr^2}{a};$$

par conséquent l'équation (196) deviendra

$$v^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right).$$

Si l'on prend a pour unité de distance, la valeur de v^2 ne différera pas de celle que nous avons déterminée, art. 315.

338. Pour première application des formules (184), cherchons la trajectoire d'un point matériel qui se meut dans l'espace en vertu d'une impulsion unique. Dans ce cas, les forces accélératrices sont nulles; ainsi nous avons

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o,$$

et les équations (184) se réduisent à

$$\frac{d^2z}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = o;$$

multipliant par dt, elles deviennent

$$\frac{d^2z}{dt} = o, \quad \frac{d^2y}{dt} = o, \quad \frac{d^2x}{dt} = o.$$

Les intégrales de ces équations seront

$$\frac{dz}{dt} = c; \quad \frac{dy}{dt} = b; \quad \frac{dx}{dt} = a \ldots \quad (197).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (185), nous trouverons,

$$v=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\textit{constante};$$

donc en appelant A cette constante,

$$\frac{ds}{dt}=A,$$

et par conséquent,

$$s=At+B;$$

d'où il suit que le mouvement est uniforme.

Ce mouvement s'effectue en ligne droite; car les équations (197) multipliées par dt étant intégrées, donnent

$$z=ct+c',\quad y=bt+b',\quad x=at+a';$$

éliminant t, on trouve

$$y=\frac{bz}{c}+\frac{b'c-bc'}{c},\quad x=\frac{az}{c}+\frac{a'c-ac'}{c}.$$

On reconnaît dans ces équations celles d'une ligne droite dans l'espace.

Du mouvement d'un point matériel assujéti à se mouvoir sur une courbe donnée.

339. Lorsqu'un point matériel m (fig. 167) sans pesanteur est assujéti à se mouvoir sur une courbe en vertu d'une force d'impulsion K, si l'on décompose K en deux forces, l'une $mN=K'$, normale à la courbe, et l'autre $mT=K''$, tangente à la courbe, la force normale sera détruite par la résistance de cette courbe, et la force dirigée suivant la tangente aura seule son effet. Fig. 167.

En considérant la courbe comme un polygone $mm'm''m'''$, etc. (fig. 168) d'un nombre infini de côtés, l'angle $tm'm''$ Fig. 168.
formé par le prolongement du côté mm' avec le côté sui-

vant $m'm''$, est appelé l'*angle de contingence*; nous le représenterons par ω : le plan $tm'm''$ est le plan osculateur au point m'; ce plan, dans les courbes planes, est celui de la courbe.

Le mobile m, sollicité par la force K, reçoit une vitesse primitive v qui lui fera décrire le côté mm'; mais lorsqu'il sera arrivé en m', il se détournera pour parcourir $m'm''$. Dans ce passage, il perdra une vitesse que nous allons évaluer.

Pour cet effet, représentons la vitesse v par la droite $m'q$. Si nous décomposons $m'q$ en deux vitesses, l'une $m'n$ dirigée suivant le côté $m'm''$, et l'autre $m'l$ perpendiculaire à ce côté, nous aurons

$$m'l = m'q \sin tm'm'', \quad m'n = m'q \cos tm'm'',$$

ou

$$m'l = v \sin \omega, \quad m'n = v \cos \omega.$$

La composante $v \sin \omega$ étant détruite par la résistance du polygone, la vitesse v sera réduite à $v \cos \omega$; par conséquent la vitesse perdue qui est égale à la vitesse primitive moins la vitesse actuelle, sera exprimée par $v - v \cos \omega$; ou, ce qui est la même chose, par $v(1 - \cos \omega)$.

Quand au lieu d'un polygone on a une courbe, l'angle $tm'm''$ devient infiniment petit. Dans ce cas, la vitesse $v(1 - \cos \omega)$ est un infiniment petit du second ordre.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $1 - \cos \omega$
Fig. 169. représentant le sinus verse DB (fig. 169) de l'angle ω mesuré par l'arc CB, nous avons

$$AD : CD :: CD : DB.$$

Or, quand un arc CB est infiniment petit, il en est de même de CD; et puisque CD est infiniment petit à l'égard de AD, il faut, en vertu de la proportion précédente, que DB soit aussi infiniment petit à l'égard de CD, c'est-à-dire soit un infiniment petit du second ordre. Ainsi la vitesse qui est perdue

par chaque côté infiniment petit du polygone, étant un infiniment petit d'un ordre inférieur, doit être négligée devant la vitesse $v \cos \omega$ qui est un infiniment petit du premier ordre. D'où l'on peut conclure que le mobile qui parcourt la courbe conserve toujours toute la vitesse qui lui a été imprimée lorsqu'il s'est mis en mouvement.

340. Quant à la force $v \sin \omega$ qui presse la courbe et qui est détruite par sa résistance, cette force varie à chaque élément, puisque $\sin \omega$ change continuellement; par conséquent on peut la considérer comme une force accélératrice qui agirait sur le mobile.

Si, outre cette force, il y avait plusieurs forces accélératrices appliquées au point m, en les décomposant de la même manière, on devrait ajouter à $v \sin \omega$ toutes les composantes normales de ces forces accélératrices.

341. Imaginons au point m (fig. 167) une force normale N, directement opposée et égale à la résultante de toutes ces forces; la résistance que la courbe leur oppose sera mesurée par N. Nommons α, $\mathcal{C}$, γ les angles que cette force accélératrice normale fait avec les trois axes; les composantes de N suivant ces axes, seront respectivement Fig. 167.

$$\text{N} \cos \alpha, \quad \text{N} \cos \mathcal{C}, \quad \text{N} \cos \gamma,$$

et devront s'ajouter aux forces accélératrices X, Y, Z dans les équations (184) du mouvement; de sorte que nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \text{X} + \text{N} \cos \alpha \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \text{Y} + \text{N} \cos \mathcal{C} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \text{Z} + \text{N} \cos \gamma \end{aligned}\right\} \ldots (198).$$

A ces équations nous en réunirons deux autres qui résultent

des relations nécessaires qui existent entre les angles α, β et γ; la première de ces équations est

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ldots (199).$$

A l'égard de la seconde, nous observerons que lorsque deux droites qui sont à angles droits dans l'espace forment avec les axes coordonnés des angles α, β, γ et α', β', γ', on a, d'après les principes de la Géométrie analytique,

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0\ (*).$$

Dans le cas présent, cette équation subsiste entre la tangente et la normale; car α, β, γ étant les angles formés par la normale N avec les axes coordonnés, cette normale est perpendiculaire à la tangente en m, qui fait avec les axes coordonnés des angles que nous pourrons représenter par α', β', γ'; ces angles α', β', γ' étant aussi ceux que l'élément de la courbe forme avec les axes, on a

$$\cos\alpha' = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta' = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma' = \frac{dz}{ds};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{dx}{ds}.\cos\alpha + \frac{dy}{ds}.\cos\beta + \frac{dz}{ds}.\cos\gamma = 0 \ldots (200).$$

342. Pour déterminer la vitesse, on multipliera les équations (198), la première par $2dx$, la seconde par $2dy$, et la troisième par $2dz$, et en les ajoutant on obtiendra

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} + 2dz\frac{d^2z}{dt^2} = 2(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$
$$+ 2\mathrm{N}(dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma).$$

Le dernier terme de cette équation doit être supprimé à cause

(*) C'est l'équation de l'art. 144, qui a été démontrée art. 143.

de la relation suivante,

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = 0;$$

il nous restera

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} + 2dz\frac{d^2z}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz),$$

ou plutôt

$$\frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = 2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Remplaçant la somme des carrés des différentielles des variables par ds^2 et intégrant, nous obtiendrons

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C,$$

ou

$$v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + C \dots (201).$$

343. Appliquons ces formules au cas où les forces accélératrices sont nulles; on a alors

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et par conséquent,

$$v^2 = constante.$$

Ainsi, un corps sans pesanteur qui se mouvrait sur une courbe, conserverait toujours la même vitesse. C'est ce que nous avons déjà prouvé dans l'hypothèse où le point qui est mis en mouvement serait libre, art. 334.

344. Supposons maintenant que le mobile qui glisse sur la courbe soit un corps pesant; nous aurons dans ce cas

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

et alors l'équation (201) se réduit à

$$v^2 = 2\int g dz = 2gz + C.$$

Si v devient V quand z est nul, nous aurons

$$V^2 = C.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, nous obtiendrons

$$v^2 = 2gz + V^2;$$

d'où nous tirerons

$$v = \sqrt{2gz + V^2} \ldots (202).$$

Cette équation donne la vitesse, indépendamment des relations qui peuvent exister entre les coordonnées x, y, z; par conséquent cette vitesse a lieu quelle que soit la forme de la courbe.

L'équation que nous venons d'obtenir pour déterminer la vitesse ne suffit pas lorsqu'on veut connaître le temps et l'espace; car en y mettant la valeur de v, on a

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz + V^2};$$

on tire de cette équation

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gz + V^2}} \ldots (203);$$

et en mettant la valeur de ds (note de l'art 180), nous aurons

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{2gz + V^2}} \ldots (204).$$

Or, pour intégrer, il faut qu'au moyen des équations de la courbe, on puisse réduire cette dernière à n'avoir que deux variables; car supposons que les équations de la courbe soient

$$f(x, z) = 0, \quad \phi(y, z) = 0 \ldots (205).$$

Si, à l'aide de ces équations et de la précédente, on parvient à éliminer deux des variables x, y, z, il ne s'agira plus que d'intégrer une équation entre dt et l'une des coordonnées du point matériel.

345. Par exemple, si la courbe, et ce mot est pris dans toute son acception, est une droite située dans l'espace, les équations (205) sont alors de la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6 \ldots (206);$$

on en tirera

$$dx = adz, \quad dy = bdz;$$

et en substituant ces valeurs dans la formule (204), on la convertira en

$$dt = \frac{dz\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{\sqrt{2gz + V^2}}.$$

Si le corps part du repos, la vitesse initiale est nulle; et l'on a, en divisant par le radical du numérateur,

$$\frac{dt}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{dz}{\sqrt{2gz}};$$

intégrant, on trouvera

$$\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} + C = \frac{1}{g}\sqrt{2gz} \ldots \ (207).$$

346. Pour obtenir l'espace parcouru, nous remplacerons le radical supérieur de l'équation (204) par ds, et supprimant V qui est nul dans notre hypothèse, nous réduirons cette équation à

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz};$$

éliminant z de cette équation à l'aide de l'équation (207),

nous trouverons

$$ds = \frac{gt\,dt}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + Cgdt,$$

et en intégrant,

$$s = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + Cgt + C';$$

ce qui montre que ce mouvement est le même que celui d'un corps qui descendrait le long d'un plan incliné, comme on devait s'y attendre.

347. Enfin, si l'on demandait quelles sont les valeurs de chacune des trois coordonnées x, y et z, en fonction du temps, la dernière est déjà donnée par l'équation (207); et à l'aide de cette équation et des équations (206), on déterminerait x et y en fonction de t.

348. Lorsque, comme dans le cas présent, la courbe sur laquelle se meut le point matériel est plane, et renferme les forces accélératrices, en plaçant dans le plan de cette courbe les axes coordonnés que nous supposerons être ceux des x et des y, la troisième des équations (198) cessera d'exister, les équations (199) et (200) se réduiront à

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 = 1, \quad \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos 6 = 0;$$

et au lieu des deux équations de la courbe, nous n'en aurons plus qu'une seule, qui sera de la forme

$$y = fx.$$

349. La vitesse donnée par l'équation (202) étant déterminée sans qu'il soit besoin de faire usage des équations (205), concluons que la vitesse ne dépend point de la forme de la courbe, mais de son ordonnée verticale. Par conséquent, si, à
Fig. 170. partir du point O (fig. 170) où $z = 0$ et $v = V$, on mène divers

arcs de courbe OM, OM', OM'', etc., qui se terminent au plan horizontal KL; toutes les ordonnées z de ces points étant égales, il s'ensuit qu'en faisant partir du point O différens mobiles avec la même vitesse V, ils auront acquis des vitesses égales lorsqu'ils seront arrivés aux points M, M', M'', etc., situés sur le plan horizontal.

350. En général, quel que soit le nombre des forces accélératrices, lorsque l'équation est intégrable, on peut déterminer v sans qu'il soit nécessaire d'assigner la courbe. En effet, si, d'après la nature des forces accélératrices, on met dans l'équation (201) les valeurs de X, de Y et de Z, en fonction des coordonnées x, y, z, et que l'expression

$$\int(Xdx + Ydy + Zdz)$$

soit intégrable, nous pourrons la représenter par

$$f(x, y, z),$$

et alors l'équation (201) deviendra

$$v^2 = 2f(x, y, z) + C.$$

Appelant $f(a, b, c)$ ce que devient $f(x, y, z)$ lorsque $v = 0$, on aura

$$v^2 = 2f(x, y, z) - 2f(a, b, c),$$

expression qui ne dépend que des coordonnées des points x, y, z et a, b, c.

351. Nous avons vu que la force normale N dérivait des composantes des forces accélératrices, prises dans le sens de la normale à la courbe, et de la force normale produite par la vitesse. Pour évaluer cette dernière force, abaissons les perpendiculaires on, on' (fig. 171) sur les milieux des côtés égaux consécutifs mm', $m'm''$ d'un polygone d'un très grand nombre de côtés, l'angle $tm'm''$ formé par l'un de ces côtés et le pro- Fig. 171.

longement de l'autre, sera celui que nous avons représenté par ω. Or, les angles n et n' du quadrilatère $non'm'$ étant droits, on aura

$$non' + nm'n' = 2 \text{ angles droits} = tm'm'' + nm'n';$$

donc

$$tm'm'', \quad \text{ou} \quad \omega = non' = 2nom'.$$

La petitesse de l'angle nom' qui est mesuré par l'arc qui lui correspond, permet de prendre le sinus à la place de l'arc, et comme ce sinus est exprimé par $\frac{m'n}{m'o}$ ou plutôt par $\frac{m'n}{no}$, puisque les droites $m'o$ et no sont censées égales, nous trouverons

$$\omega = \frac{2m'n}{no} = \frac{mm'}{no};$$

en passant du polygone à la courbe qui en est la limite, le côté $m'm$ deviendra l'élément de la courbe, et no son rayon de courbure; par conséquent l'expression précédente se changera en

$$\omega = \frac{ds}{\gamma}.$$

Nommons φ la force accélératrice qui dérive des composantes normales de la vitesse : comme toute force accélératrice est représentée par l'élément de la vitesse, divisé par celui du temps (art. 297), et que dans notre cas l'élément de la vitesse est $v \sin \omega$, nous aurons

$$\varphi = \frac{v \sin \omega}{dt};$$

ou, parce que tout arc infiniment petit peut être substitué à son sinus, cette expression deviendra

$$\varphi = \frac{v\omega}{dt};$$

remplaçant ω par sa valeur que nous venons de trouver, nous aurons

$$\varphi = \frac{v}{\gamma}\frac{ds}{dt} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{v^2}{\gamma}.$$

A l'égard de la pression normale qui résulte des autres forces, on la déterminera par le parallélogramme des forces.

352. Supposons, par exemple, que la courbe soit plane, et que les forces qui sont appliquées au mobile agissent dans le plan de la courbe, on réduira toutes les forces à une seule R dirigée dans ce plan; et en nommant θ l'angle que cette force fait avec la normale, on aura R cos θ pour la composante de R suivant cette normale. Si cette force agit contre la courbe, elle sera en sens contraire de la force $\frac{v^2}{\gamma}$ qui presse le point matériel sur la courbe, ou, ce qui est la même chose, qui tend à l'éloigner du centre; nous aurons donc, dans ce cas,

$$N = \frac{v^2}{\gamma} - R\cos\theta.$$

Du mouvement d'un point matériel assujéti à se mouvoir sur une surface courbe.

353. Lorsqu'un point matériel qui ne peut se mouvoir que sur une surface courbe est soumis à l'action de plusieurs forces accélératrices, ces forces variables, et celles qui proviennent de la vitesse initiale, auront une résultante qui devra être détruite par la résistance qu'oppose la surface; si nous désignons donc par N cette résistance, on pourra regarder le point matériel comme libre, pourvu que, dans les équations (184), on fasse entrer les composantes de N. Pour cela, nommons α, ζ, γ les angles que cette force fait avec les axes coordonnés, ses composantes, suivant ces axes, auront pour expressions N cos α, N cos ζ, et N cos γ; par conséquent les équations du mouvement demandé seront

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\alpha\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos6\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ldots (208).$$

On connaîtra les angles α, 6, γ, lorsque l'équation $L = 0$ de la surface courbe sera donnée; en effet, nous avons vu, art. 62, qu'on déduisait de cette équation (*),

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos6 = \frac{\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Pour simplifier, faisons, comme dans l'art. 62,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}} = V.$$

Les équations précédentes deviendront

$$\cos\alpha = V\frac{dL}{dx},\quad \cos6 = V\frac{dL}{dy},\quad \cos\gamma = V\frac{dL}{dz};$$

et comme le radical comporte le double signe, il ne faudra pas oublier qu'il en sera de même de V. Substituant ces valeurs dans les équations

(*) Nous supprimons les accents qui affectaient x, y, z, dans les équations de l'art. 62, parce que nous sommes libres d'admettre que le point d'application de la force N, au lieu d'être représenté par x', y', z', le soit par x, y, z.

(208), on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + NV\frac{dL}{dx}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + NV\frac{dL}{dy}\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + NV\frac{dL}{dz}\end{aligned}\right\}\ldots \text{(209)}.$$

Éliminant N entre ces équations, V disparaîtra en même temps, et l'on obtiendra deux équations qui, jointes à L = o, détermineront les coordonnées du mobile en fonction du temps.

354. Prenons pour exemple le mouvement d'un point matériel sur une sphère; plaçons l'origine des coordennées au centre, mettons le plan des x, y dans une position horizontale, et enfin menons l'axe des z positifs dans la partie située au-dessous du plan des x, y; par cette disposition de l'axe des z, les ordonnées positives z auront le même signe que la pesanteur. Cela posé, l'équation de la sphère étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ldots \text{(210)},$$

nous en déduirons, par la différentiation,

$$xdx + ydy + zdz = o \ldots \text{(211)};$$

par conséquent, nous aurons

$$\frac{dL}{dx} = x,\quad \frac{dL}{dy} = y,\quad \frac{dL}{dz} = z \quad \text{et}\quad V = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{a}.$$

D'un autre côté, la seule force accélératrice qui existe ici étant g, nous avons

$$X = o,\quad Y = o,\quad Z = g;$$

ces valeurs réduisent les équations (209) à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\frac{x}{a},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = N\frac{y}{a},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = g + N\frac{z}{a}\ldots \text{(212)}.$$

Pour éliminer N entre ces équations, il suffira des deux premières, et de multiplier l'une et l'autre par la variable qu'elle ne renferme pas; opérant ainsi, prenant la différence des résultats, et supprimant un des facteurs de dt^2, on trouvera

$$\frac{yd^2x - xd^2y}{dt} = o,\quad \text{ou}\quad \frac{d(ydx - xdy)}{dt} = o;$$

intégrant, en traitant dt comme constant, on trouvera

$$ydx - xdy = Cdt \ldots \text{(213)}.$$

Pour avoir une seconde équation, parce que celle-ci contient trois variables, on multipliera chacune des trois équations (212) par la différentielle de la variable qu'elle contient, et les ajoutant, on obtiendra

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdz + \frac{N}{a}(xdx + ydy + zdz) = 0;$$

et comme la quantité qui est renfermée entre les parenthèses est nulle, en vertu de l'équation (211), le résultat que nous venons d'obtenir se réduit à

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdz;$$

multipliant par 2 et intégrant, on a

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + C' \ldots \quad (214).$$

C'est entre cette équation et les équations (210) et (213) qu'il faut éliminer deux des variables x, y et z pour que l'intégration en s'effectuant puisse nous donner l'autre variable en fonction du temps; mais avant que de procéder à cette élimination, on entrevoit déjà que le résultat qu'on obtiendra sera indépendant de la force normale N qui a disparu de ces équations.

355. En considérant l'équation (214), il est facile de voir que puisqu'elle ne contient dans son second membre d'autre variable que z, la séparation des variables x, y, z s'effectuerait si l'on pouvait, à l'aide des équations (210) et (213), déterminer la valeur de $dx^2 + dy^2$ en fonction de z, pour la substituer dans le premier membre de l'équation (214). Or, l'équation (211) qui dérive de (210), et l'équation (213), élevées au carré, nous donnent

$$x^2dx^2 + 2xydxdy + y^2dy^2 = z^2dz^2,$$
$$y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2 = C^2dt^2;$$

et l'on voit que le terme en $dxdy$ disparaîtra du résultat en ajoutant ensemble ces équations. Effectuant donc cette opération, on trouve

$$(x^2 + y^2)dx^2 + (x^2 + y^2)dy^2 = C^2dt^2 + z^2dz^2,$$

ou plutôt

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = C^2dt^2 + z^2dz^2;$$

mettant dans cette équation la valeur de $x^2 + y^2$ tirée de l'équat. (210), on obtient enfin

$$dx^2 + dy^2 = \frac{C^2dt^2 + z^2dz^2}{a^2 - z^2};$$

substituant cette valeur dans l'équation (214), et supprimant les termes en z^2dz^2 qui se détruisent, il viendra

$$dt = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + C') - C^2}} \dots (215).$$

L'intégrale de cette équation, qui ne pourra se déterminer que par approximation, donnera la valeur de z en fonction du temps.

356. Pour trouver les autres variables en fonction du temps, soit ft la valeur approximative de z, fournie par l'équation précédente ; on pourrait bien la substituer dans l'équation (214), et, en combinant ensuite cette nouvelle équation avec celle qui est désignée par (213), obtenir deux équations, l'une en x et en t, et l'autre en y et en t ; mais alors les variables x et t dans la première, et y et t dans la seconde, ne seraient pas séparées. C'est à cause de cet inconvénient qu'on emploie cet autre moyen pour parvenir aux valeurs de x et de y en fonction de t.

Soient $AC = x$ (fig. 172), $DC = y$, $mD = z$, les trois coordonnées du point m de la sphère où se trouve le mobile ; si, pour une valeur de z, on donnait l'angle CAD que fait la projection AD de la droite Am avec l'axe des x, il serait facile de déterminer x et y en z. En effet, nommons θ l'angle CAD, comme Am est égal au rayon a de la sphère, nous avons évidemment $AD = \sqrt{a^2 - z^2}$; et le triangle ACD rectangle en C, nous donne Fig. 172.

$$AC = AD \cos CAD, \quad CD = AC \sin CAD,$$

ou

$$x = \sqrt{a^2 - z^2} . \cos\theta, \quad y = \sqrt{a^2 - z^2} . \sin\theta \dots (216);$$

ces deux équations établissant une relation entre les variables x, y, z, tiennent la place de celle de la sphère, qu'on obtiendra en ajoutant la somme de leurs carrés. A la vérité, nous avons la nouvelle variable θ ; mais aussi nous introduisons dans le calcul une équation de plus.

En différentiant les équations (216), nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\sin\theta d\theta \sqrt{a^2 - z^2} - \frac{zdz}{\sqrt{a^2 - z^2}} \cos\theta \\ dy &= \quad \cos\theta d\theta \sqrt{a^2 - z^2} - \frac{zdz}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sin\theta \end{aligned}\right\} \dots (217);$$

multipliant les équations (217) l'une par la seconde des équations (216), et l'autre par la première de ces équations, et prenant la différence des résultats, on trouve

$$ydx - xdy = -(a^2 - z^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta,$$

ou plutôt, parce que $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ équivaut à l'unité,

$$ydx - xdy = (z^2 - a^2)\, d\theta.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (213), on obtient

$$(z^2 - a^2)\, d\theta = Cdt,$$

et par conséquent

$$d\theta = \frac{Cdt}{z^2 - a^2};$$

remplaçant dt par sa valeur, tirée de l'équation (215), on obtient enfin

$$d\theta = \frac{aCdz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(a^2 - z^2)\,(2gz + C') - C^2}}.$$

Cette équation, intégrée par approximation, fera connaître la valeur de θ; on en déduira ensuite celles de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, qui, étant substituées dans les équations (216), détermineront les valeurs de x et de y en fonctions de z, et par conséquent du temps dont z est une fonction.

357. L'équation (214) détermine la vitesse indépendamment de la force normale N; car la somme des carrés des différentielles étant égale au carré de ds, cette équation nous donne

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gz + C',$$

ou

$$v^2 = 2gz + C';$$

et par conséquent

$$v = \sqrt{2gz + C'}.$$

Mais si l'on demande la valeur de cette force N, il faut recourir aux équations (212); on les multipliera respectivement par x, par y et par z, et en réunissant les produits, on obtiendra

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = gz + \frac{N}{a}(x^2 + y^2 + z^2) \ldots \quad (218).$$

Or, la différentielle de l'équation (211), c'est-à-dire l'équation...... $d(xdx + ydy + zdz) = 0$, nous donne

$$\frac{xd^2y + yd^2x + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 0,$$

ou

$$\frac{xd^2y + yd^2x + zd^2z}{dt^2} = -\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}.$$

ou, parce que le second membre est le carré de la vitesse,

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -v^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (218), et en vertu de l'équ. 210, remplaçant $x^2+y^2+z^2$ par a^2, l'équation 218 deviendra

$$-v^2 = gz + Na,$$

et par conséquent

$$N = -\frac{v^2 + gz}{a}.$$

358. Ici nous trouvons N négatif, parce que des deux valeurs dont V était susceptible, ayant adopté arbitrairement la positive dans les équations (209), cela est en contradiction avec la supposition que la force normale N porte le même signe que les z positifs. Pour lever cette difficulté, nous disposerons donc de la faculté que nous avons de choisir le signe de V, en lui donnant le signe négatif dans les équat. (209), ce qui nous conduira à ce résultat :

$$N = \frac{v^2 + gz}{a}.$$

Du mouvement d'un point matériel sur la Cycloïde.

359. Supposons qu'un point matériel M qui se meut sur la cycloïde parte du repos; la vitesse initiale de ce point étant alors nulle, nous ferons $V = 0$ dans l'équation (202) de l'article 344, qui, étant élevée au carré, nous donnera

$$v^2 = 2gz,$$

ou plutôt à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gz;$$

d'où l'on tirera

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

Prenons, comme précédemment, l'origine des abscisses au point E (fig. 173), et nommons u l'abscisse ED d'un point quelconque M', pour ne point confondre cette abscisse avec la variable x qui entre dans l'équation de la cycloïde; et appe- Fig. 173.

lons h l'abscisse EC du point M de départ, nous aurons

$$CD = EC - ED,$$

ou

$$z = h - u.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, il viendra

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-u)}} \dots (219).$$

Cette équation contenant trois variables, nous allons chercher à en éliminer une au moyen de l'équation de la cycloïde. Pour cela, nommons $2a$ le diamètre BE du cercle générateur, et x, y les coordonnées AP, PM′ d'un point M′ de la cycloïde : l'équation de cette courbe étant (*Élém. de Calc. différentiel*)

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}} \dots (220),$$

transformons-la en une autre qui ne contienne que les variables s et u de l'équ. (219). Or nous avons entre s, y et x la relation

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2},$$

ou

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Mettant dans cette équation la valeur de $\frac{dx}{dy}$ tirée de l'équation (220), on obtiendra

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{2ay - y^2}};$$

réduisant au même dénominateur les quantités qui sont sous le radical, effaçant les termes qui se détruisent, et supprimant le facteur commun y, il restera

$$ds = dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}} \dots (221).$$

L'expression $2a-y$ qui entre dans cette formule, n'est autre chose que l'abscisse ED que nous avons appelée u; par conséquent on a

$$2a-y=u,\quad dy=-du.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (221), on trouve

$$ds=-du\sqrt{\frac{2a}{u}}.$$

La valeur de ds est négative, parce que lorsque l'abscisse $ED=u$ augmente, l'arc AM' diminue.

Mettant cette valeur de ds dans l'équation (219), on obtient

$$dt=-\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{hu-u^2}},$$

et

$$t=-\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\int\frac{du}{\sqrt{hu-u^2}}\ldots\ (222).$$

360. Pour déterminer l'intégrale qui entre dans cette valeur de t rappelons-nous qu'on a en général (*Élém. de Calcul intégral*, art. 277)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\text{arc}\,(\sin\text{verse}=x);$$

et qu'en faisant $x=\frac{z}{a}$, cette formule se réduit à

$$\int\frac{dz}{\sqrt{2az-z^2}}=\text{arc}\left(\sin\text{ verse}=\frac{z}{a}\right)\ldots\ (223);$$

par conséquent, en rapportant l'intégrale de l'équation (222) à cette formule, nous trouverons

$$t=-\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc}\left(\sin\text{ verse}=\frac{u}{\frac{1}{2}h}\right)+C\ldots\ (224).$$

Pour déterminer la constante, observons que le temps

commençant lorsque le mobile est en M, nous avons alors

$$t=0 \quad \text{et} \quad u=EC=h;$$

cette hypothèse réduit l'équation (224) à

$$0=-\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc}(\text{sin verse}=2)+C.$$

Or, l'arc dont le sinus versé est 2 étant la demi-circonférence décrite avec le rayon 1, si nous représentons par π cette demi-circonférence, l'équation précédente deviendra

$$C=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Cette valeur étant mise dans l'équation (223), nous aurons

$$t=\sqrt{\frac{a}{g}}\times\left(\pi-\text{arc sin verse}=\frac{2u}{h}\right).$$

Ce temps est celui qui a lieu lorsque le mobile étant parti du point M, est arrivé au point M' dont l'abscisse est $ED=u$. Par conséquent, pour obtenir le temps que le mobile aura employé à parcourir l'arc ME, il faudra faire $u=0$, hypothèse qui réduira l'équation précédente à

$$t=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On voit que cette expression est indépendante de la hauteur h qui est l'abscisse EC du point de départ M; d'où l'on peut conclure qu'en quelque endroit que soit situé le point de départ M, ce mobile emploiera toujours le même temps pour arriver en E. Une courbe qui jouit de cette propriété est appelée *courbe tautochrone*.

Du Mouvement d'oscillation.

Fig. 174. 361. Soit OBC (fig. 174) une courbe continue coupée aux points O et C par une droite horizontale; supposons que dans

cette courbe il n'y ait point d'angle qui puisse occasioner une perte de vitesse, et que la tangente BT à la plus grande ordonnée BP, soit horizontale et perpendiculaire à cette ordonnée; alors la direction de BP sera verticale, et le plan des x, y devra être horizontal, parce que nous employons des axes rectangulaires. Cela posé, cherchons l'expression de la vitesse d'un mobile qui, sollicité par la pesanteur, glisserait sur la courbe; pour cet effet, nous observerons d'abord que si l'on regarde comme positives les ordonnées z qui se trouveront au-dessous du plan des x, y, la pesanteur g s'accroissant en même temps que ces ordonnées, devra être aussi considérée comme positive. Ainsi, faisant g positif dans les équations qui déterminent le mouvement du mobile, nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=g.$$

Pour déterminer la vitesse, opérant comme dans l'art. 333, nous multiplierons la première de ces équations par $2dx$, la seconde par $2dy$, et la troisième par $2dz$, et en les ajoutant, on trouvera

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2gdz;$$

intégrant, on aura

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2gz+C;$$

ou, en observant que la somme des carrés des différentielles des coordonnées est égale au carré de l'élément ds, l'équation précédente pourra se convertir en

$$\frac{ds^2}{dt^2}=2gz+C.$$

Mettant v à la place de $\frac{ds}{dt}$, il viendra

$$v^2=2gz+C.$$

Fig. 174. Soit V la vitesse initiale qui a lieu au point O, lorsque $z = o$, l'équation précédente nous donnera

$$C = V^2;$$

par conséquent, en y substituant cette valeur de C, on obtiendra

$$v^2 = V^2 + 2gz \ldots (225).$$

362. Les ordonnées croissant depuis O jusqu'en B, l'équation (225) nous montre que la vitesse v doit aller en s'accélérant lorsque le mobile parcourt l'arc OB, et qu'elle parvient en B à son *maximum*. Les ordonnées devant ensuite décroître, la vitesse diminuera à mesure que le mobile parcourra l'arc BC. Dans cette diminution, elle passera par les mêmes degrés de vitesse qu'elle s'était augmentée; car, si par un point quelconque m on mène un plan horizontal qui coupe la courbe suivant une droite mm', les ordonnées mp et $m'p'$ seront égales; par conséquent, en substituant leurs valeurs dans l'équation (225), on verra que les vitesses du mobile aux points m et m' seront égales.

La vitesse du mobile diminuant d'autant plus que l'arc parcouru Om est moindre, on trouvera, sur le prolongement de cet arc, un point A où cette vitesse aura été nulle; par conséquent, le point A sera celui où le mobile est censé avoir reçu le mouvement. Si, par ce point, on mène une droite horizontale AA', la vitesse en A' sera donc également nulle. Ainsi le mobile, dans son mouvement, s'arrêtera en ce point A' où la vitesse est nulle. Alors l'action de la pesanteur le ramènera de A' en B; et comme les ordonnées vont en croissant de A' en B, il sera facile de conclure, au moyen de l'équation (225), que la vitesse ira aussi en croissant. Le mobile parvenu au point B, où il a le *maximum* de vitesse, continuera donc à se mouvoir en vertu de cette vitesse, et remontera sur la branche BA jusqu'au point A, où la vitesse sera nulle. Mais l'action de

la pesanteur le faisant descendre, il parcourra encore l'arc AB pour remonter jusqu'en A', et ainsi de suite; de sorte que le mobile fera un nombre indéfini d'oscillations.

Il est évident que les vitesses successives qu'acquiert le mobile lorsqu'il se meut sur l'arc AB, étant les mêmes que lorsqu'il se meut sur l'arc BA', le mobile emploie le même temps à parcourir ces arcs. Ces oscillations faites en temps égaux sont appelées *isochrones*.

363. Lorsque la courbe rentre sur elle-même, comme dans la figure 175, et que les tangentes aux points B et B' sont parallèles à l'horizon, si le mobile parti d'un point quelconque O avec une vitesse initiale, descend de O en B, et peut remonter de B en B' sans que sa vitesse soit épuisée, il descendra de nouveau le long de l'arc B'OB, et la pesanteur lui rendra successivement la vitesse qu'il avait lorsque pour la première fois il a parcouru B'OB. Pendant ensuite de sa vitesse lorsqu'il remontera suivant l'arc BO'B', il lui restera en B' le même excès de vitesse que lorsque, avant d'avoir fait une révolution de la courbe, il était en ce point. Il suit de là que le mobile, au lieu d'osciller, fera un nombre indéfini de révolutions autour de la courbe. Fig. 175.

Du Pendule simple.

364. Le pendule simple est un point matériel M (fig. 176) qui, animé par la pesanteur et suspendu à une droite inflexible MC, fait des oscillations autour du centre C. Il est certain que dans ce mouvement le point M est assujéti à décrire un arc de cercle; ainsi la vitesse de ce point sera donnée, art. 354, par l'équation Fig. 176.

$$v^2 = V^2 + 2gz \quad \ldots \quad (226).$$

Changeant v en $\frac{ds}{dt}$ dans cette équation, et tirant la valeur de

dt, on trouvera

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{V^2 + 2gz}} \ldots (227).$$

Fig. 177. Le point de départ étant pris pour origine, z sera l'ordonnée M'P' (fig. 177) du point M' où se trouve le mobile dans un instant quelconque, et V^2 représentera le carré de la vitesse initiale, c'est-à-dire de celle qui avait lieu lorsque le mobile était à son point de départ M. Nommons h la hauteur due à cette vitesse initiale, nous aurons

$$V^2 = 2gh,$$

et les équations (226) et (227), en y substituant cette valeur, deviendront

$$v = \sqrt{2g(h+z)}, \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h+z)}} \ldots (228).$$

365. On peut exprimer z en fonction des coordonnées du cercle décrit par CM (fig. 177). Pour cet effet, abaissons des
Fig. 177. points M et M', les perpendiculaires MB, M'D sur la verticale CE, et nommons a le rayon CE, b la distance verticale EB, et x l'abscisse ED du point M' rapportée à la nouvelle origine E, nous aurons

$$z = BD = b - x.$$

Au moyen de cette valeur, on convertira les équations (228) en celles-ci,

$$v = \sqrt{2g(h+b-x)}, \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h+b-x)}} \ldots (229).$$

La première de ces équations nous donne la vitesse du mobile au point M' qui correspond à l'abscisse x; la seconde, lorsque nous l'aurons intégrée, nous fera connaître le temps que le mobile aura employé à venir en M'. Pour cela, nous ferons en sorte que le second membre de cette équation ne renferme

plus qu'une seule variable; c'est à quoi nous parviendrons facilement en combinant cette équation avec les suivantes,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots (230),$$
$$y^2 = 2ax - x^2 \ldots\ldots (231);$$

différentiant cette dernière, nous obtiendrons

$$ydy = (a - x)dx,$$

et par conséquent,

$$dy^2 = \frac{(a-x)^2}{y^2}dx^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (230), nous trouverons

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{y^2}\right)dx^2} = dx\sqrt{\frac{y^2 + (a-x)^2}{y^2}}.$$

Mettant dans le numérateur de la fraction qui est sous le radical, la valeur de y^2 donnée par l'équation (231), développant et réduisant, nous obtiendrons

$$ds = dx\sqrt{\frac{a^2}{y^2}} = \pm\frac{adx}{y} = \pm\frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$
$$= \pm\frac{adx}{\sqrt{(2a-x)x}};$$

donc

$$dt = -\frac{adx}{\sqrt{(2a-x)x}.\sqrt{2g(h+b-x)}}.$$

Des deux signes qui devraient affecter la valeur de dt, nous avons choisi le négatif, parce que lorsque t augmente, x diminue (*).

(*) On peut remarquer que, dans ce cas, l'origine des x doit être placée en un point plus bas que celui d'où l'on compte le temps, et par conséquent l'arc s; et qu'alors les accroissemens de x étant négatifs, il en doit être de même de dx.

366. Supposons que la vitesse initiale soit nulle, nous aurons

$$k = 0;$$

si en même temps l'arc suivant lequel se font les oscillations est très petit, nous pourrons négliger x devant $2a$, et la valeur de dt se réduira à

$$dt = -\frac{adx}{\sqrt{2ax}\cdot\sqrt{2g(b-x)}}.$$

Remplaçant le facteur a du numérateur par $\sqrt{a^2}$, on pourra mettre l'équation précédente sous la forme

$$dt = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(b-x)x}} \dots (232).$$

Ainsi pour avoir t, il ne s'agit plus que d'obtenir la valeur de l'intégrale suivante,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} \dots (233).$$

Pour y parvenir, nous comparerons cette intégrale à l'équation (223, art. 360), et nous aurons

$$a = \tfrac{1}{2}b; \quad x = z,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (223), c'est-à-dire dans l'équation

$$\int\frac{dz}{\sqrt{2az-z^2}} = \text{arc}\left(\sin\text{ verse} = \frac{z}{a}\right);$$

nous trouverons

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \text{arc}\left(\sin\text{ verse} = \frac{x}{\frac{1}{2}b}\right);$$

et en observant que, si l'on réduit les deux termes de la fraction au même dénominateur, $\frac{x}{b}$ se changeant en $\frac{2x}{b}$, l'équation

précédente deviendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \text{arc}\left(\sin \text{ verse} = \frac{2x}{b}\right);$$

et puisqu'en général, lorsque le rayon est l'unité, l'arc qui correspond au sinus verse c a pour cosinus $1 - c$, il s'ensuit que nous devons avoir

$$\text{arc}\left(\sin \text{ verse} = \frac{2x}{b}\right) = \text{arc}\left[\cos = \left(1 - \frac{2x}{b}\right)\right]$$
$$= \text{arc}\left(\cos = \frac{b - 2x}{b}\right).$$

Substituant cette valeur de l'expression (233) dans l'intégrale de l'équation (232), nous trouverons

$$t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc}\left(\cos = \frac{b - 2x}{b}\right) + \text{C} \dots (234).$$

367. Pour déterminer la constante, le temps commençant lorsque le mobile est en M, on a $t = 0$ quand $x = b$. Ces valeurs réduisent l'équation (234) à

$$0 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc}\,(\cos = -1) + \text{C}.$$

Soit 2π la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, nous avons (fig. 169) Fig. 169.

$$\text{arc}\,(\cos = -1) = \text{arc BCA} = \pi;$$

donc

$$\text{C} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (234), on trouve

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \text{arc}\left(\cos = \frac{b - 2x}{b}\right)\right] \dots (235).$$

Fig. 177. De cette manière, l'intégrale sera prise (fig. 177) depuis l'abscisse $x = b$, qui correspond à $t = 0$, jusqu'à l'abscisse indéfinie x; par conséquent t exprimera le temps de la chute du mobile, depuis l'origine du temps où il était en M, jusqu'à un point quelconque M' dont l'abscisse est x.

368. Si l'on veut avoir l'intégrale comprise depuis M jusqu'au point le plus bas E, il faut faire $x = 0$ dans la valeur de t, et en observant que l'arc dont le cosinus est 1 est égal à zéro, on a

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \ldots (236).$$

369. Le mobile arrivé en E n'a pas perdu sa vitesse; au contraire, elle parvient en ce point à son *maximum*, comme nous l'avons vu; car on doit se rappeler que la vitesse v étant donnée par l'équation

$$v = \sqrt{2gz},$$

la plus grande valeur de z est celle qui a lieu lorsque le mobile est arrivé en E. Ainsi, en vertu de cette vitesse, le mobile passe sur l'arc EN; et comme cet arc change de signe, on trouvera pour le temps que le mobile a employé à parvenir en N',

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi + \text{arc}\left(\cos = \frac{b - 2x}{b}\right)\right] \ldots (237).$$

Si de cette équation nous retranchons l'équation (236) qui nous donne le temps qui s'est écoulé lorsque le mobile est arrivé de M en E, il nous reste l'expression

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.\,\text{arc}\left(\cos = \frac{b - 2x}{b}\right)$$

pour le temps que le mobile a mis à venir de E en N' : c'est justement le même temps qu'il emploierait à descendre sui-

vant l'arc M'E; car ce temps s'obtiendrait en retranchant l'équation (235) de l'équation (236). Enfin, lorsque le mobile s'est élevé jusqu'au point N situé sur le plan horizontal qui passe par le point M où la vitesse est nulle, alors $x = b$, et l'expression arc $\left(\cos \frac{1-2x}{b}\right)$ devient arc$(\cos = -1) = \pi$, ce qui change l'équation (237) en

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \times 2\pi;$$

tel sera le temps que le mobile emploiera à parcourir l'arc total MEN. Représentons ce temps par T, nous aurons

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \ldots (238).$$

Le mobile parvenu en N a perdu toute sa vitesse; car en ce point la vitesse initiale étant nulle, on a

$$h = 0:$$

cette valeur et celle de $x = b$ réduisent l'équation $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h + b - x)}$ à

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \text{ou à} \quad v = 0.$$

La vitesse du mobile étant donc épuisée lorsqu'il arrive en N, la pesanteur doit le faire descendre; et comme les circonstances initiales au point N sont les mêmes qu'elles l'étaient en M, le mobile décrira une seconde oscillation NEM, et ainsi de suite.

370. L'équation (238) étant indépendante de la constante b qui détermine la distance verticale MK, on voit que si le point de départ, au lieu d'être en M, était en M', la durée de l'oscillation serait la même; par conséquent dans l'hypothèse de l'article 366 où les oscillations se font sur un très petit arc, des mobiles qui partent des points différens M, M', M''; etc.,

de ce petit arc, demeureront sensiblement (*) le même temps à faire leurs oscillations.

371. Lorsqu'on prend des pendules de longueurs différentes, les temps des oscillations ne sont pas les mêmes; car nommons a et a' les longueurs de deux pendules dont les oscillations sont décrites dans les temps T et T', nous aurons

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \quad T' = \pi\sqrt{\frac{a'}{g}};$$

donc

$$T : T' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'} \ldots (239).$$

Ainsi, connaissant le temps T de l'oscillation d'un pendule, la proportion précédente déterminera la longueur du pendule qui répondrait à un temps arbitraire T', on fera connaître le temps relatif à un pendule dont la longueur serait a.

372. Pour déterminer avec plus de précision le temps d'une oscillation, voici le procédé que l'on emploie. Représentons par N le nombre d'oscillations que fait le pendule a dans le temps θ, et par N' le nombre d'oscillations que fait le pendule a' dans le même temps θ, on a

$$T = \frac{\theta}{N}, \quad T' = \frac{\theta}{N'} \ldots (240).$$

Au moyen de ces valeurs, la proportion (239) donne

$$N'^2 : N^2 :: a : a';$$

donc

$$a' = \frac{aN^2}{N'^2}.$$

Lorsque pour un pendule simple d'une longueur donnée, on connaît donc le nombre d'oscillations en un temps donné,

(*) Nous disons *sensiblement* parce que c'est en négligeant une petite quantité (art. 366), que l'équation (238) a été obtenue.

on peut en conclure la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans une seconde de temps.

373. C'est en se fondant sur ce qui précède qu'on a trouvé que dans le vide, et à la température de la glace fondante, la longueur du pendule à secondes (division sexagésimale) qui fait 86,400 vibrations dans le jour moyen, est de

$$440^{l},553 = 0^{m},9938,$$

et que la longueur du pendule décimal, qui fait 100,000 vibrations dans le jour moyen, à la même latitude, est de

$$0^{m},7419\ (^{*}).$$

374. Pour déterminer g, l'équation (238) nous donnera

$$g = \frac{\pi^2 a}{T^2} \ldots (241);$$

par conséquent, en faisant dans cette équation

$$T = 1'', \quad a = 440^{l},553, \quad \text{et} \quad \pi = 3,1415926,$$

c'est-à-dire

$$\pi^2 = 9,8696046,$$

on trouvera

$$g = 4348^{l} = 30^{pi},195 \text{ environ ou } 9^{m},8085.$$

375. La longueur du pendule à l'équateur, d'après un grand nombre d'observations, a été fixée à $0^{m},99102557$. Si dans l'équation (241) on met cette valeur de a et celles de π^2 et de T

(**) D'après un terme moyen entre plusieurs épreuves faites sur le pendule décimal en platine, par MM. Biot, Mathieu et Bouvard, dans la salle de la méridienne de l'Observatoire, élevée de $70^{m},25$ au-dessus du niveau de la mer, ces savans ont fixé à $0^{m},7419012$ la longueur de ce pendule, et à $0^{m},7419176$ celle qu'il a quand il est transporté au niveau de la mer, à la même latitude. Ces expériences ont toutes été faites dans le vide et à la température de la glace fondante. (*Voyez le recueil d'observ. géodés., astronom. et physiqu., de MM. Biot et Arago.*)

données par l'art. 374, on trouvera, par la gravité à l'équateur

$$G = 9^m,7811.$$

376. Si g et g' sont les gravités relatives aux pendules a et a', qui font leurs oscillations dans les temps T et T', comme cela arrive lorsque les pendules sont situés à différentes latitudes, on aura

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},\quad T' = \pi\sqrt{\frac{a'}{g'}};$$

d'où l'on tirera

$$T : T' :: \sqrt{\frac{a}{g}} : \sqrt{\frac{a'}{g'}}.$$

Soient N et N' les nombres d'oscillations que font ces pendules dans un même temps θ, T et T' seront donnés en fonction de θ par les équations (240); substituant leurs valeurs dans cette proportion, et supprimant le facteur commun θ, on aura

$$\frac{1}{N} : \frac{1}{N'} :: \sqrt{\frac{a}{g}} : \sqrt{\frac{a'}{g'}}.$$

Si le pendule est le même dans les deux lieux, on a $a' = a$, et la proportion précédente nous donne

$$g' = \frac{gN'^2}{N^2}.$$

De la force centrifuge.

Fig. 178. 377. Lorsqu'un mobile se meut autour d'un centre fixe C, et décrit la courbe LMK (fig. 178), s'il était libre, il s'échapperait en vertu de la loi d'inertie, suivant la tangente LT à la courbe; mais si l'on suppose maintenant qu'au lieu d'être libre, il soit retenu par le centre C, le mobile abandonnera la direction de la tangente LT et arrivera en M. Or, si l'arc LM est infiniment petit, l'angle LCM le sera aussi; par conséquent

on devra regarder les droites LC et MC comme parallèles. Dans ce cas, on pourra donc remplacer CM par la parallèle à LC menée par le point M, c'est-à-dire par MC'; alors le centre fixe sera considéré comme si, au lieu d'être situé en C, il était en C'. Cela posé, puisque le mobile livré à lui-même devrait être à l'extrémité D du parallélogramme infiniment petit LNMD, tandis que lorsqu'il est retenu par le centre fixe, il est arrivé en M, l'effet de la force qui l'attire vers C' sera donc mesuré par MD. D'une autre part, la droite inflexible menée par le centre fixe au mobile, n'éprouvant une tension que parce que le mobile résiste à la force qui l'attire vers ce centre, cette tension sera aussi mesurée par MD. C'est cette force qui écarterait le mobile du centre fixe, si l'action de ce centre cessait d'agir. Cette tension est la force centrifuge; elle est égale et directement opposée à la force qui sollicite le mobile vers le centre, et qu'on appelle *la force centripète*.

D'après ce qui précède, on voit que la force centrifuge n'est autre chose que celle que nous avons représentée par $\frac{v^2}{\gamma}$ (art. 351 et 352).

378. Pour déterminer directement l'expression de la force centrifuge, nous pouvons remplacer l'arc infiniment petit LM par la corde du cercle osculateur au point L (fig. 179), et représenter l'effet de la force centrifuge par le sinus verse LN. Fig. 179.

Cela posé, d'après la propriété du cercle, nous avons

$$LN : ML :: ML : LE,$$

ou, en substituant l'arc à la corde,

$$LN : ds :: ds : 2\gamma;$$

donc

$$LN = \frac{ds^2}{2\gamma};$$

et, en mettant vdt à la place de ds, on trouvera

$$LN = \frac{v^2 dt^2}{2\gamma} \ldots (242).$$

Examinons si nous ne pouvons pas trouver une autre expression de LN. Pour cela, remarquons que le temps employé par
Fig. 178. le mobile à venir de L en M (fig. 178), est le même que celui que la force centrifuge met à produire l'effet LN. Or, quand l'espace parcouru par le mobile est l'arc LM $= ds$, le temps correspondant à ds sera dt. D'où il suit que LN est l'effet de la force centrifuge dans l'instant dt. Pour évaluer cet effet, il faut observer que la force centrifuge agit continuellement et conserve toujours la même intensité à chaque impulsion qu'elle donne au mobile, parce qu'elle est directement opposée à la force centripète qui le retient et qui lui oppose à chaque instant la même résistance.

La force centrifuge doit donc être considérée comme une force accélératrice constante. Ainsi, en représentant par f l'effet de cette force dans l'unité de temps, nous regarderons f comme constante dans les équations

$$\frac{dv}{dt} = f, \quad \frac{de}{dt} = v;$$

en intégrant ces équations, nous trouverons

$$v = t.f; \quad e = \tfrac{1}{2}t^2.f.$$

Or, l'espace LN étant celui qui correspond au temps dt qui a commencé à s'écouler depuis que le mobile était en L, il faudra, lorsque e deviendra LN, que t se change en dt dans l'équation précédente, et alors on trouvera

$$LN = \tfrac{1}{2}dt^2.f.$$

Mettant cette valeur de LN dans l'équation (242) et réduisant, nous obtiendrons

$$f = \frac{v^2}{\gamma}.$$

379. Si le mobile se mouvait circulairement, comme une

fronde qu'on fait circuler, y deviendrait le rayon R du cercle décrit par le mobile, et au lieu de l'équation précédente, nous aurions

$$f=\frac{v^2}{R}\ldots\ (243).$$

Soit h la hauteur due à la vitesse v; il y aura, art. 307, entre ces variables, la relation

$$v^2=2gh;$$

éliminant v^2 entre cette équation et la précédente, nous obtiendrons

$$\frac{f}{g}=\frac{2h}{R};$$

ce qui nous apprend que la force centrifuge est à la gravité, comme le double de la hauteur due à la vitesse est au rayon du cercle décrit par le mobile.

380. Si un demi-cercle HAK (fig. 180) fait une révolution autour du diamètre HK $=2R$, le point A, milieu de HAK, décrira une circonférence égale à $2\pi R$; et en supposant que ce mouvement du point A se fasse uniformément dans un temps T, si nous désignons par v la vitesse, nous aurons Fig. 180.

$$v\times T=2\pi R;$$

éliminant v entre cette équation et l'équation (243), on trouvera

$$f=\frac{4\pi^2R}{T^2}\ldots\ (244).$$

Pareillement, soit f' la force centrifuge qui dérive de la rotation d'un mobile sur une circonférence $2\pi R'$, et nommons T′ le temps écoulé dans ce mouvement, nous aurons encore,

$$f'=\frac{4\pi^2R'}{T'^2};$$

donc

$$f:f'::\frac{R}{T^2}:\frac{R'}{T'^2}\ldots\ (245).$$

D'où il suit que lorsque les rayons R et R' sont les mêmes, les forces centrifuges sont en raison inverse des carrés des temps; et que lorsque les temps sont les mêmes, les forces centrifuges sont dans le rapport direct des rayons.

381. Il est facile maintenant d'obtenir l'effet de la force centrifuge f qui a lieu à l'équateur; car suivant M. Puissant (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1816), le rayon de la Terre à l'équateur étant de 6377859 mètres (*), il suffira de remplacer R par cette valeur dans l'équation (244), et d'y mettre en même temps celles de π et de T. Or, nous avons approximativement

$$\pi = 3,1415926, \quad \text{et} \quad \pi^2 = 9,8696046.$$

A l'égard de T, nous le remplacerons par la révolution entière d'un mobile qui serait à l'équateur. Or, on sait que la Terre fait sa révolution diurne en $0^j,997269$, et qu'un jour est composé de 86400 secondes. Ainsi, en multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura

$$T = 0^j,997269 \times 86400'' = 86164 \text{ secondes.}$$

Substituant dans l'équation (244), cette valeur et celle de R, donnée au commencement de cet article, on obtiendra

$$f = 0^m,0339 \ldots (246).$$

382. Connaissant f, on peut déterminer l'expression G' de la gravité qui aurait lieu à l'équateur si la Terre était immobile. En effet, f agissant en sens contraire de la pesanteur, doit diminuer l'intensité de celle qui est donnée par l'observation, et que nous appelons G; de sorte qu'on aura

$$G = G' - f,$$

ou, ce qui revient au même,

$$G' = G + f;$$

(*) Cette valeur diffère peu de celle de 6377432^m déterminée par M. Herschel.

mettant dans cette dernière équation la valeur de f donnée par l'équation (246), et celle de la gravité G qui, à l'équateur (art. 375), est de $9^m,77811$, nous trouverons

$$G' = 9^m,77811 + 0,0339,$$

ou

$$G' = 9^m,812 \ldots \quad (247).$$

Pour déterminer le rapport de la force centrifuge f à la pesanteur G, il suffit de diviser l'équation (246) par la valeur de G (art. 375), ce qui nous donnera, à peu de chose près,

$$\frac{f}{G} = \frac{0^m,0339}{9^m,7811} = \frac{1}{289} \ldots \quad (248).$$

383. La proportion (245) fournit la solution de ce problème : *Trouver quel devrait être le temps de la révolution diurne de la Terre pour que la force centrifuge fût égale à la pesanteur.*

Dans ce cas, soit T' le temps d'une révolution du globe terrestre, et f' la force centrifuge qui l'animerait alors ; nous aurions par la nature du problème

$$f' = G, \quad \text{et} \quad R' = R ;$$

en substituant ces valeurs dans la proportion (245), on la réduirait à

$$f : G :: \frac{1}{T^2} : \frac{1}{T'^2},$$

et l'on obtiendrait

$$T'^2 = \frac{f}{G} T^2.$$

Mettant dans cette équation la valeur de $\frac{f}{G}$ donnée par l'équation (248), et tirant la racine carrée, on trouverait

$$T' = \frac{T}{\sqrt{289}},$$

$$T' = \frac{T}{17} \text{ environ ;}$$

par conséquent, si la Terre avait un mouvement 17 fois aussi rapide que celui qui la fait tourner sur son axe, la force centrifuge serait égale à la pesanteur.

384. Pour savoir de combien la force centrifuge diminue celle de la gravité en un point qui ne serait pas à l'équateur, il faut trouver l'effet de la force centrifuge suivant la verticale
Fig. 180. BZ (fig. 180), menée par le point B que l'on considère. Pour cet effet, regardons la Terre comme sphérique, parce que cette hypothèse n'influe pas sur le calcul; alors la latitude du lieu B étant représentée par l'arc AB, sera mesurée par l'angle

$$BCA = ZBE = \psi.$$

Nommons R le rayon AC de la Terre, et R′ le rayon BD du parallèle qui passe par B, nous aurons

$$R' = R \cos CBD,$$

ou

$$R' = R \cos \psi.$$

La force centrifuge EB qui agirait en B suivant DB, sera égale, art. 380, à $\frac{4\pi^2 R'}{T^2}$; et la composante $f' = Bb$ dirigée suivant BZ, sera donnée par l'équation

$$f' = \frac{4\pi^2 R'}{T^2} \times \cos \psi.$$

Mettant dans cette expression la valeur de R′, on aura donc

$$f : f' :: 1 : \cos \psi^2;$$

ce qui nous apprend que les forces centrifuges, en des lieux différens de la Terre, sont entre elles comme les carrés des cosinus des latitudes.

385. La latitude de Paris, mesurée à l'Observatoire, étant de 48° 50′ 49″, a pour cosinus

$$0{,}65807;$$

multipliant la valeur de f (*voyez* l'équation 246) par le carré de ce nombre, c'est-à-dire par

$$0{,}4330,$$

on trouvera

$$f' = 0^{m},01468 = 0^{pi},04519.$$

Nommons g' ce que deviendrait à cette latitude la gravité g si la Terre était immobile; comme la force centrifuge agit en sens contraire de la gravité, elle diminue donc g' de f', de sorte que l'on doit avoir, comme dans l'art. 382,

$$g' = g + f'.$$

La pesanteur g, à la latitude de Paris, et en adoptant le système sexagésimal pour la seconde de temps, étant de

$9^{m},80867$ nouv. mes., ou de $30^{pi},19544$ anc. mes.,

nous trouverons, en substituant ces valeurs et celles de f' dans l'équation précédente (*),

$$\left.\begin{array}{l} g' = 9^{m},80867 + 0^{m},01468 = 9^{m},82335 \\ \text{ou} \\ g' = 30^{pi},19544 + 0^{pi},04519 = 30^{pi},24063 \end{array}\right\} \ldots (249).$$

(*) Newton en supposant 48° 50′ 10″ pour la latitude de Paris, et en regardant la Terre comme une sphère dont le rayon, d'après les mesures de Picard, serait de 19615800 pieds, avait trouvé que la force centrifuge qui a lieu à l'équateur était à celle qui, à la latitude de Paris, écarte les corps du centre de la Terre, dans le rapport des nombres 7,54064 et 3,267; et l'on voit que ce rapport diffère peu de celui de 0,0339 à 0,0146, ou plutôt de 339 à 146, qui résulte de nos calculs.

Du Système du monde. Tous les corps sont soumis à la force de l'attraction, qui agit en raison inverse du carré de la distance. Aperçu de la manière dont la pesanteur de la Lune peut servir à vérifier la loi de la gravité; démonstration de celles de Képler; détermination de la trajectoire dans l'hypothèse d'une force quelconque, et modification que le cas de la nature fait éprouver à l'équation de l'orbite; solution du problème inverse, par lequel on se propose de déduire la loi de la raison inverse du carré de la distance de celles de Képler.

386. En exposant la théorie du centre de gravité, nous avons déjà eu occasion de considérer cette force occulte qui réside au centre de la Terre, et qui entraîne les corps perpendiculairement à sa surface. Cette force est l'attraction, qui n'était pas inconnue aux anciens : Anaxagore et ses disciples, Démocrite, Pythagore, Épicure, etc., en admettaient l'existence, et ce sont les idées de ces philosophes que Képler, Galilée, Huyghens, Fermat, Roberval, etc., renouvelèrent dans les temps modernes, en prétendant que les corps s'attirent comme l'aimant attire le fer. Képler, si fécond en grands aperçus, dit expressément, dans son livre *De Stella Martis*, que l'attraction n'est point circonscrite aux êtres situés sur la Terre, mais s'étend jusqu'aux astres les plus reculés. Cette idée hardie resta long-temps infructueuse par la difficulté d'en prouver la justesse. Galilée avait seulement mesuré les effets de la pesanteur à la surface de notre globe.

Le chancelier Bacon, dont le vaste génie donna une nouvelle impulsion à la philosophie des sciences, soupçonna que cette force singulière devait s'augmenter ou diminuer à mesure que les corps se rapprochent ou s'éloignent du centre de la Terre; c'est la recherche qu'il propose aux savans dans son fameux Ouvrage sur l'interprétation des phénomènes de la nature, où il leur conseille de vérifier, au moyen des horloges à poids, si les corps ne deviennent pas plus pesans au fond d'une mine que sur le sommet d'une montagne. Lui-même il s'était occupé long-temps de cette recherche, en faisant descendre des mobiles de différentes élévations, et en cherchant à reconnaître si leur chute, qui est de 15 pieds dans la première seconde, ne subirait pas d'altération dans les secondes suivantes. Rien n'éclaircit ses doutes; quelque grande que fût la distance des lieux où il se transportait, elle était toujours trop peu étendue pour que la pesanteur variât sensiblement d'intensité.

Newton porta ses regards plus loin : non content de soupçonner, comme Bacon, l'affaiblissement de la pesanteur à mesure qu'on s'éloigne du centre de la Terre, il chercha quelle pouvait être la loi que suit cette force attractive. Celle de la raison inverse du carré de la distance lui parut la plus conforme à l'analogie qui nous fait reconnaître cette loi dans la propagation de la lumière, et dans la plupart des émanations des qualités sensibles des êtres. Pour vérifier ses conjectures, dédaignant de recourir aux faibles moyens qui avaient si mal réussi à Bacon, c'est en mesurant la pesanteur même de la Lune, que son génie audacieux osa interroger la nature sur ce grand phénomène. Un seul obstacle l'arrêta cependant, c'est qu'il n'eut d'abord que des données fautives sur la vraie distance de cet astre, et sur les dimensions du globe terrestre ; mais enfin les nouvelles observations des astronomes, et la mesure du méridien par Picard, lui fournirent les renseignemens désirés, et lui permirent de fonder ses opérations sur des bases moins inexactes (*).

387. La première chose que nécessite cette recherche, c'est de connaître l'effet de la pesanteur à la surface de la Terre. Nous avons vu que la théorie du pendule nous y conduisait, et que l'on avait (art. 382), à l'équateur, et dans l'hypothèse où la Terre serait fixe,

$$G' = 9^{m},812, \quad \text{ou} \quad 30^{pi},205.$$

Pour savoir de combien cette quantité devrait être diminuée à la région de la Lune, en vertu de la loi de Newton, il faut préalablement déterminer la distance du disque lunaire au centre de la Terre. Cette distance dépend de la parallaxe horizontale de la Lune.

Par parallaxe horizontale, on entend l'angle HLC (fig. 181) formé par deux droites qui, partant de l'astre observé, aboutissent, l'une au centre de la Terre, et l'autre à l'extrémité du rayon CH, auquel elle est perpendiculaire. Cet angle L, lorsque la Lune est dans sa moyenne distance, est, suivant M. de Laplace (*Mécanique céleste*, tom. III, p. 248), de 57′4″,17. Si l'on prend donc le rayon de la Terre pour unité, on aura Fig. 181.

$$CL \sin L = CH = 1,$$

et par conséquent

$$CL = \frac{1}{\sin 57'4'',17} = 60,24.$$

(*) Newton d'après Picard évaluait cet arc du méridien à 5135400 toises, tandis que la commission des poids et mesures a reconnu qu'il était de 5130740 toises, valeur que des mesures subséquentes n'élèvent guère plus haut.

Cette valeur est peu différente de celle qu'emploie Newton, qui suppose que cette moyenne distance est de $60\frac{1}{3}$. (*Liv. 3e des Principes, prop. 37.*)

388. Maintenant, si l'on appelle γ ce que devient la gravité G' à la région de la Lune, et e' l'espace qu'elle ferait parcourir à un corps, dans l'hypothèse où elle décroîtrait suivant la loi de la raison inverse du carré de la distance, on aura

$$G' : \gamma :: (60,24)^2 : 1,$$

d'où l'on tirera

$$\gamma = \frac{G'}{(60,24)^2}.$$

Tel sera l'effet de la gravité dans une seconde de temps, sur un corps qui serait à la région de la Lune.

389. Mettant cette valeur à la place de g, dans la formule générale

$$e = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

et changeant e en e', on aura l'espace e' parcouru dans le temps t.

Ainsi, en supposant que le temps t soit d'une minute, c'est-à-dire de $60''$, on aura, pour l'espace e' qui devrait être parcouru dans une minute de temps,

$$e' = \frac{(60)^2\, G'}{2(60,24)^2} \dots \quad (250).$$

390. Si l'on néglige la fraction décimale, cette équation se réduit à

$$e' = \tfrac{1}{2}\, G';$$

ce qui nous montre que l'espace parcouru e' dans une minute de temps, à la région de la Lune, la Terre étant fixe, devrait être, dans l'hypothèse de la loi de Newton, égal au chemin qu'un corps décrirait à la surface de la Terre, non en une minute, mais en une seconde de temps.

Mais si l'on a égard à la fraction décimale, et qu'à l'aide des logarithmes on veuille déterminer la valeur de e', on aura,

$$\begin{aligned} \log (60)^2 \text{ ou } 2 \log 60. &= 3,5563025 \\ \log G' \text{ ou } \log 9^m,812 &= 0,9917575 \\ &\overline{\quad 4,5480600,} \end{aligned}$$

d'un autre côté nous avons

$$\begin{aligned} \log 2 \dots\dots\dots\dots\dots &= 0,3010300 \\ 2 \log (60,24) \dots\dots\dots &= 3,5597700 \\ &\overline{\quad 3,8608000,} \end{aligned}$$

prenant la différence de ces deux sommes de logarithmes, il restera

0,6872600 pour la valeur du logarithme de e' et en passant aux nombres

$$e' = 4^{m},8670 \quad \text{on} \quad e' = 14^{pi},983\ldots \quad (251);$$

tel sera le chemin que, dans l'hypothèse de la loi de Newton, devrait décrire en une minute un corps qui serait à la région de la Lune.

391. Examinons maintenant si l'expérience s'accorde avec ce résultat. Pour cet effet, supposons que la Lune, dans sa moyenne distance en L (fig. 182) décrive, durant une minute, l'arc LM; si l'on mène les parallèles LQ et QM, l'une au sinus et l'autre au sinus verse, on pourra regarder LM comme la diagonale d'un parallélogramme dont LQ et LP seraient les composantes. La première entraînera la Lune tangentiellement à l'arc LM, et la seconde tendra à la rapprocher du centre C; c'est donc cette seconde force qui mesurera l'effet de la force attractive placée en C. Fig. 182.

Cette composante LP sera évidemment le sinus verse de l'angle LCM, qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, nous remarquerons que lorsque la Lune est dans sa moyenne distance, le rayon r de son orbite varie peu pour l'arc très petit qui est décrit dans une minute de temps.

On peut donc admettre que la Lune se meuve comme si elle devait rester dans le cercle décrit par r; or, d'après la loi des aires, les arcs décrits en temps égaux étant égaux dans le cercle, ces arcs ou les angles qui leur correspondent, seront proportionnels aux temps. Appelant donc T le temps de la révolution sidérale de la Lune, c'est-à-dire de la révolution qui la ramène au même point du ciel, nous aurons

$$T : \textit{une minute} :: 360^{\circ} : \textit{angle}\ \mathrm{LCM},$$

donc

$$\textit{angle}\ \mathrm{LCM} = \frac{360^{\circ}}{T};$$

la révolution sidérale étant reconnue, même du temps de Newton, être de $27^{j}\ 7^{h}\ 43^{m}$, c'est-à-dire de $39343^{\prime}$, si nous remplaçons T par ce nombre, et que nous réduisions les degrés en secondes pour que la division puisse s'effectuer, nous trouverons, en négligeant les décimales à partir du troisième rang sur la droite,

$$\textit{angle}\ \mathrm{LCM} = \frac{1296000''}{39343} = 32'',94.$$

392. La question étant maintenant réduite à trouver le sinus verse d'un angle de 32",94, dans un cercle qui serait décrit avec le rayon moyen de l'orbite lunaire, voici une manière facile d'y parvenir. Pour cela, menons (fig. 182) la perpendiculaire CI sur le milieu de la corde LM, les triangles LMP, LCI rectangles, l'un en P et l'autre en I, ayant l'angle Fig. 182

L commun, seront semblables, et donneront la proportion

$$LC : IL :: ML : LP,$$

ou

$$LC : IL :: 2IL : LP;$$

d'où l'on tirera

$$LP = 2\frac{IL^2}{LC} \ldots (252).$$

Nommons θ l'angle LCI, moitié de l'angle LCM, et r le rayon moyen LC, nous aurons

$$IL = r\sin\theta,$$

et l'équation (252) deviendra

$$LP = 2r\sin^2\theta;$$

et en mettant la valeur de l'angle θ,

$$LP = 2r\sin^2 16'' \tfrac{47}{100} \ldots (253).$$

393. Nous avons vu que la distance moyenne de la Lune à la Terre évaluée en rayons de l'équateur avait pour expression (art. 387) 60,24; et comme le rayon de la Terre à l'équateur (art. 381) est de 6377859 mètres, nous aurons donc

$$r = (60,24)(6377859),$$

substituant cette valeur dans l'équation (253) nous trouverons

$$LP = 2(60,24)(6377859)\sin^2 16'' \tfrac{47}{100} \ldots (254),$$

le sinus qui entre dans cette formule appartient à un cercle qui a le rayon pour unité. Si l'on veut que ce sinus soit celui des tables, on a la proportion

sin tabulaire : *dix milliards* :: *sin dont le rayon est l'unité* : 1,

d'où l'on tire

$$\frac{\textit{sin dont le rayon est l'unité}}{1} = \frac{\textit{sin tabulaire}}{\textit{dix milliards}},$$

introduisant cette quantité dans l'équation (254) nous obtiendrons

$$LP = \frac{2(60,24)(6377859)(\textit{sin tabulaire de } 16'', \frac{47}{100})^2}{(10 \textit{ milliards})^2}.$$

Pour exécuter les opérations indiquées dans cette formule, employant les logarithmes, nous avons

$$\begin{aligned}\log 2 \ldots\ldots\ldots &= 0,3010300\\ \log 60,24 \ldots\ldots &= 1,7798850\\ \log 6377859 \ldots &= 6,8046749\\ \log \sin^2 16'',47 &= 11,8045280\\ \hline &\quad 20,6901179,\end{aligned}$$

retranchant de ce résultat le logarithme du carré de 10 milliards qui est vingt, caractéristique, il restera

$$\log LP = 0,6901179,$$

passant aux nombres on a

$$LP = 4^m,899.$$

Si l'on veut que le logarithme de LP se rapporte à des pieds, il suffira d'y ajouter 0,4883313 (*), et l'on aura 1,1784492, logarithme qui répond à

$$LP = 15^{pi},081 \text{ (**)}.$$

394. L'expérience prouve donc que la Lune tombe vers la Terre en une minute de $4^m,899 = 15^p,081$, valeurs très approchantes de celles que nous avons trouvées art. 390, équations (251), dans l'hypothèse où la loi de l'attraction subsisterait. La différence n'est pas d'un dixième de pied, pour le temps de la chute en une minute d'un corps situé à la distance de la Lune, et par conséquent elle est insensible pour la chute en une seconde. Si les deux résultats ne sont pas absolument les mêmes, dans toutes les décimales, on sent que cela ne provient que de certaines quantités dont nous n'avons pas tenu compte; mais y eût-on égard, comme nous n'opérons que d'après des mesures qui, par la difficulté des opérations que leur détermination exigeait, ne sauraient être regardées comme étant

---

(*) Pour le démontrer soit M un nombre de mètres, et P sa valeur en pieds, le mètre valant $3^{pi},078444$, on a la proportion

$$1^m : 3^{pi},078444 :: M : P,$$

donc

$$P = M \times 3^{pi},07844,$$

et

$$\log P = \log M + \log 3^{pi},078444 = \log M + 0,4883313;$$

veut-on au contraire convertir des pieds en mètres, cette équation nous donnant

$$\log M = \log P - 0,4883313;$$

on voit qu'il faudrait retrancher 0,4883313 du logarithme des pieds.

(**) Si l'on eût employé le rayon de M. Herschel (page 238), on aurait trouvé $15^{pi},080$, valeur bien peu différente.

d'une exactitude extrême, on sent qu'on ne peut espérer de parvenir à une identité parfaite entre les nombres qui expriment la chute hypothétique et la chute réelle.

395. Ce qui précède suffit cependant pour nous faire entrevoir que la force de la gravité s'étend jusque sur le globe lunaire, et va en diminuant selon la raison inverse du carré de la distance. Cette loi a été ensuite confirmée par une foule de théories et de tables astronomiques qui renferment implicitement la loi de Newton, et n'ont jamais été démenties par l'observation. Il n'est donc point de phénomène qui soit plus appuyé sur l'expérience; mais ce qui met l'hypothèse du philosophe anglais tout-à-fait en évidence, c'est qu'elle s'accorde entièrement avec les lois de Képler qui ont été si souvent vérifiées par l'expérience, et dont voici l'énoncé :

1°. *Les planètes décrivent des ellipses dont le foyer est au centre d'attraction autour duquel s'opèrent leurs mouvemens;*

2°. *Les aires des secteurs elliptiques des planètes sont proportionnelles au temps qu'elles emploient à décrire les arcs de ces secteurs;*

3°. *Les carrés des temps des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes de leurs distances au centre commun de leurs mouvemens, c'est-à-dire au centre du Soleil autour duquel elles circulent.*

396. La première de ces lois, comme nous allons le démontrer, n'est qu'un cas particulier de celui de la nature, qui exige que tout corps soumis à une force qui agit en raison inverse du carré de la distance, se meuve dans une section conique.

La seconde de ces lois a déjà été reconnue (art. 335), et appartient en général à tout corps attiré vers un centre fixe, quelle que soit d'ailleurs la nature de la force motrice qui le sollicite. Ainsi tout se réduit à prouver l'existence de la première et de la troisième loi de Képler.

397. Pour y parvenir, plaçons l'origine des coordonnées au centre d'attraction, qui sera celui du Soleil pour notre système planétaire,
Fig. 183. et appelons R la force accélératrice qu'exerce cet astre sur une planète, et r le rayon vecteur de son orbite. Ce rayon vecteur Am (fig. 183) faisant un angle $mAP = \varphi$ avec l'axe des x, ses composantes AP et Pm, suivant les axes coordonnés, auront pour expression

$$Am \cos\varphi, \quad Am \sin\varphi.$$

Or, dans le triangle rectangle AmP, on a évidemment

$$\cos\varphi = \frac{AP}{Am} = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{mP}{Am} = \frac{y}{r};$$

ainsi, les composantes X et Y de la force accélératrice φ, seront

$$X = R\frac{x}{r}, \quad Y = R\frac{y}{r};$$

et comme la courbe tourne sa concavité vers le point fixe, la force accélératrice qui agit suivant mA, tend à diminuer les coordonnées $AP = x$ et $PM = y$ du point m; par conséquent, art. 51, nous affecterons du signe négatif les composantes de la force accélératrice représentées par ces coordonnées, et nos deux équations deviendront

$$X = -R.\frac{x}{r},\quad Y = -R.\frac{y}{r};$$

ou, en remplaçant X et Y par leurs valeurs tirées des équations de l'art. 331, nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R.\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R.\frac{y}{r}\ldots\ (255).$$

398. Pour intégrer ces équations, nous multiplierons la première par y et la seconde par x; retranchant l'un des produits de l'autre, et divisant par dt, il restera

$$y\frac{d^2x}{dt} - x\frac{d^2y}{dt} = 0,$$

équation dont l'intégrale sera

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = a\ldots\ (256),$$

et par a nous désignerons la constante arbitraire ajoutée à l'intégration.

399. Pour avoir une autre intégrale première, nous multiplierons les équations (255), l'une par $2dx$ et l'autre par $2dy$; et ajoutant les produits, nous trouverons

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} = -2R\frac{(xdx + ydy)}{r}\ldots\ (257).$$

Le second membre de cette équation contenant les trois variables x, y et r, nous la transformerons en une fonction de cette dernière au moyen de la relation $x^2 + y^2 = r^2$, qui donne par la différentiation

$$xdx + ydy = rdr;$$

mettant cette valeur de $xdx + ydy$ dans le second membre de l'équation 257, on obtiendra

$$\frac{2dxd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} = -2Rdr;$$

ou plutôt, parce que dt est constant,

$$d\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) = -2Rdr.$$

Intégrant et nommant b la constante arbitraire, nous obtiendrons

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = b - 2\int R dr \ldots (258).$$

400. Nous avons affecté Rdr du signe d'intégration, parce que, si l'on veut que la distance influe sur la force accélératrice, c'est supposer que l'une dépende de l'autre en vertu d'une certaine loi qui restera arbitraire tant que nous n'aurons pas adopté une hypothèse particulière.

401. Comme il nous reste encore trois variables dans cette équation, nous la réduisons à deux (savoir x et φ) en y introduisant les valeurs de x et do y en fonction du rayon vecteur r, et de l'angle φ qu'il forme avec l'axe des x; ces valeurs seront données par les formules

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \ldots (259).$$

Ces formules nous donnent en différentiant ces fonctions x et y, par rapport aux variables r et θ,

$$\left.\begin{array}{l} dx = -r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi dr \\ dy = r\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dr \end{array}\right\} \ldots (260);$$

les valeurs de x et de y, de dx et de dy, données par les équations (259) et (260), étant mises dans l'équation (256), on obtient, après la réduction,

$$-r^2\frac{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{dt}d\varphi = a;$$

et comme la somme des carrés du sinus et du cosinus est égale à l'unité, l'équation précédente devient

$$-r^2\frac{d\varphi}{dt} = a \ldots (261).$$

Opérant de même relativement à l'équation (258), on trouve d'abord, en ajoutant les carrés des équations (260), et en réduisant,

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 \ldots (262).$$

Par conséquent, en mettant cette valeur de $dx^2 + dy^2$ dans l'équation (258), on la transformera en

$$\frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = b - 2\int R dr \ldots (263).$$

402. Pour avoir l'équation de la courbe, éliminons dt entre les équations (261) et (263) que nous venons d'obtenir par l'intégration : la première nous donnera

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{a};$$

cette valeur introduite dans la seconde, la changera en

$$\frac{a^2 r^2 d\varphi^2 + a^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2} = b - 2\int \mathrm{R} dr,$$

d'où nous tirerons

$$d\varphi = \frac{adr}{r\sqrt{br^2 - a^2 - 2r^2\int \mathrm{R} dr}} \ldots \quad (264).$$

Cette équation fera connaître le rayon vecteur pour un angle donné, lorsque ayant déterminé les constantes qu'elle renferme, on l'aura intégrée.

403. Pour savoir ce que ces constantes signifient, reprenons nos deux intégrales

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = a, \text{ et } \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = h - 2\int \mathrm{R} dr \ldots \quad (265);$$

nous avons déjà vu, art. 335, qu'en prenant l'intégrale de la première équation, on était conduit à

$$2 \text{ secteurs LCM} = at \ldots \quad (266);$$

par conséquent, si l'on fait $t = 1$, on reconnaîtra que la constante a n'est autre chose que le double du secteur décrit dans l'unité de temps.

On peut tirer la même conclusion de l'équation

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = a \ldots \quad (267)\ (*);$$

car $d\varphi$ étant l'arc infiniment petit décrit par le rayon 1, $rd\varphi$ sera l'arc infiniment petit décrit par le rayon vecteur r; donc $\frac{1}{2}r.rd\varphi$, ou $\frac{r^2 d\varphi}{2}$, représentera le secteur infiniment petit, décrit par le rayon vecteur dans l'instant dt; mais, comme les aires sont proportionnelles aux temps art. 335, on trouvera l'aire décrite dans le temps 1 par cette proportion,

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} : dt :: \textit{aire décrite dans l'unité de temps} : 1;$$

donc

$$\textit{aire décrite dans l'unité de temps} = \frac{r^2 d\varphi}{2dt};$$

(*) Nous supprimons le signe de a, parce que nous ne considérons que la valeur absolue de cette constante.

par conséquent, $r^2\frac{d\varphi}{dt}$ vaudra le double, et en vertu de l'équat. (267) sera la valeur de a.

On tire de cette même équation (267),

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{a}{r^2}\ldots\ (268);$$

et comme $\frac{d\varphi}{dt}$ exprime la vitesse angulaire du mobile (*), on voit qu'elle est en raison inverse du carré du rayon vecteur, et parvient à sa plus grande valeur au point où le rayon vecteur a la plus petite.

404. La première des équations (265) nous montre encore que la constante a est indépendante de l'hypothèse qu'en peut former sur la force accélératrice; nous verrons qu'il n'en est pas de même de la constante b, qui dépend de la force accélératrice renfermée dans la seconde de ces équations. Nous ne pouvons donc différer davantage d'établir cette hypothèse dont nous avons parlé, art. 400, nécessaire pour déterminer cette force accélératrice; et nous admettrons avec Newton que les corps s'attirent proportionnellement à leur masse, et en raison inverse du carré de leur distance. Cela posé, représentons par 1 la force exercée à une distance k par l'unité de masse; la force du Soleil qui agira sur un corps placé à cette distance k sera donc exprimée par la masse entière M de cet astre; mais la masse de la planète que le Soleil attire étant m, cette planète réagira sur le Soleil, et produira un effet exprimé par m; et comme les deux forces M et m tendent à rapprocher les deux astres l'un de l'autre, leur effet sera le même que si la force $\text{M}+m$ était concentrée dans le Soleil, et agissait sur la planète, à une distance k. Lorsque cette distance change et devient r, la force $\text{M}+m$ n'a plus, comme on l'a vu, la même intensité. Représentons donc par R ce qu'elle est alors; et comme les forces $\text{M}+m$ et r agiront en raison inverse des carrés des distances k et r, nous aurons

$$\text{M}+m : \text{R} :: r^2 : k^2;$$

d'où l'on tirera

$$\text{R}=\frac{k^2(\text{M}+m)}{r^2}\ldots\ (269).$$

(*) On l'appelle ainsi parce que l'angle φ étant mesuré par l'arc correspondant décrit avec le rayon 1, cet arc est l'espace parcouru dont la différentielle divisée par celle du temps, exprimé, art. 294, la vitesse.

Telle est la valeur de la force accélératrice totale qui, agissant à la distance r, tendra à rapprocher les deux corps l'un de l'autre.

405. La valeur que nous venons de déterminer étant celle de la force accélératrice que nous avons représentée par R, nous avons

$$\int R dr = \int k^2 \frac{(M+m)}{r^2} dr;$$

faisons pour abréger

$$k^2 (M+m) = \mu \ldots \quad (270),$$

nous changerons l'équation précédente en

$$\int R dr = \int \frac{\mu dr}{r^2} \ldots \quad (271);$$

mais comme les masses M et m, ainsi que la distance k, sont des quantités constantes, il en sera de même de μ; par conséquent, on trouvera immédiatement pour l'intégrale de l'équation (271),

$$\int R dr = \frac{-\mu}{r} + c;$$

remplaçant $\int R dr$ par cette valeur, et ensuite $b - 2c$ par b', les équations (263) et (264) deviendront

$$\frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = b' + \frac{2\mu}{r} \ldots \quad (272),$$

$$d\varphi = \frac{a dr}{r \sqrt{b'r^2 - a^2 + 2\mu r}} \ldots \quad (273).$$

406. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la constante b' qui, comme on l'a vu, est égale à $b - 2c$. Pour cela, recourant à l'équation (272), examinons d'abord ce que représente le premier membre : nous avons vu, art. 401, que la valeur nous en était donnée par l'équation (262), c'est-à-dire qu'on avait

$$\frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2};$$

et comme $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ est l'élément ds de la courbe, on voit que $\frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2}$ n'est autre chose que $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, c'est-à-dire est le carré de la vitesse estimée suivant la courbe; ainsi, en nommant v cette vitesse, l'équation (272) deviendra

$$v^2 = b' + \frac{2\mu}{r} \ldots \quad (274).$$

Cela posé, si nous représentons par V cette vitesse à l'origine du mouvement, et par λ ce que devient alors le rayon vecteur, tout sera déterminé dans l'équation (274), et nous en tirerons

$$b' = V^2 - \frac{2\mu}{\lambda}.$$

407. On pourrait aussi déterminer la constante a en fonction de la vitesse initiale. Pour cela, il faut partir d'une équation entre v et a; ce qui sera facile en mettant, d'après l'équation (268), $\frac{a}{r^2}$ à la place de $\frac{d\varphi}{dt}$ dans la formule

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2},$$

et qui la changera en

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a^2}{r^2} \ldots \quad (275).$$

Fig. 184. La valeur de dr, qui entre dans cette équation, est représentée (fig. 184) par la différence infiniment petite ml, qui existe entre les deux rayons vecteurs Am et An; en regardant le triangle mnl comme rectangle en l, et rectiligne parce qu'il est infiniment petit, on aura

$$ml = mn \cos nml,$$

ou

$$dr = ds \cos nml;$$

substituant cette valeur de dr dans l'équation (275), et changeant ensuite $\frac{ds}{dt}$ en v, nous obtiendrons

$$v^2 = v^2 (\cos nml)^2 + \frac{a^2}{r^2}.$$

Or, si nous appelons α ce que devient l'angle nml quand v et r se transforment en V et en λ à l'origine du mouvement, nous aurons, dans cette hypothèse,

$$V^2 = V^2 \cos^2 \alpha + \frac{a^2}{\lambda^2};$$

donc

$$a^2 = \lambda^2 V^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \lambda^2 V^2 \sin^2 \alpha,$$

et par conséquent

$$a = \lambda V \sin \alpha.$$

408. Ayant déterminé les constantes qui entrent dans l'équat. (273), cherchons maintenant à l'intégrer, pour pouvoir connaître ensuite quelle est la nature de la trajectoire ou courbe décrite par le mobile.

Nous essaierons d'abord de la simplifier en supposant $r = \frac{1}{z}$, parce que la différentiation des fractions de ce genre accroissant la puissance de la variable, on conçoit qu'il peut y avoir des réductions qui rendent la formule moins compliquée : c'est en effet ce qui arrive, car nous trouvons

$$d\varphi = -\frac{adz}{\sqrt{b' - (a^2z^2 - 2\mu z)}}.$$

Regardant les termes qui sont entre les parenthèses comme les deux premiers d'un carré parfait, nous voyons que, ponr le compléter, il faudrait y ajouter $\frac{\mu^2}{a^2}$; mais, pour ne pas troubler l'égalité, nous introduirons sous le radical la quantité $\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\mu^2}{a^2}$, et alors nous pourrons écrire ainsi notre équation

$$d\varphi = -\frac{adz}{\sqrt{b' + \frac{\mu^2}{a^2} - \left(az - \frac{\mu}{a}\right)^2}};$$

faisant

$$az - \frac{\mu}{a} = u, \quad \text{et} \quad b' + \frac{\mu^2}{a^2} = A^2,$$

l'équation précédente deviendra

$$d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}};$$

prenant l'intégrale (*Élém. de Calcul intégral*, art. 274 et 275), on a

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{u}{A}\right) = \varphi + \textit{constante}.$$

Remettant les valeurs de u et de A, supprimant le facteur commun a, et nommant ψ la constante arbitraire, on obtient

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{a^2z - \mu}{\sqrt{a^2b' + \mu^2}}\right) = \varphi + \psi;$$

on tire de cette équation

$$\frac{a^2z - \mu}{\sqrt{a^2b' + \mu^2}} = \cos(\varphi + \psi);$$

et, en restituant la valeur de z en r, nous trouverons enfin

$$a^2 - \mu r = r\sqrt{a^2b' + \mu^2}.\cos(\varphi + \psi) \ldots \quad (276).$$

409. La constante arbitraire ψ ne sert qu'à changer la direction de l'axe
Fig. 185. qui, avec le rayon vecteur, forme l'angle variable; par exemple (fig. 185), si l'angle CAm ou φ, formé par le rayon vecteur avec l'axe primitif AC, est successivement de 1°, de 2°, de 3°, etc., et que l'on compte l'angle variable à partir de l'axe AB qui fait avec l'axe AC un angle CAB $= \psi$, l'angle formé par le rayon vecteur Am avec cet axe AB, sera successivement de

$$1^o + \psi, \text{ de } 2^o + \psi, \text{ de } 3^o + \psi, \text{ etc.},$$

et, en général, de

$$\varphi + \psi.$$

410. L'angle $\varphi + \psi$ disparaîtra de l'équation (276) si nous transformons les coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, à l'aide de ces formules,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos(\varphi + \psi), \quad y = r\sin(\varphi + \psi) \ldots \ (277);$$

car les deux premières réduisent cette équation (276) à

$$a^2 - \mu\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{a^2b' + \mu^2}.$$

On tire de là

$$\mu\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - x\sqrt{a^2b' + \mu^2} \ldots \ (278);$$

élevant au carré et réduisant, on obtiendra

$$\mu^2y^2 - b'a^2x^2 = a^4 - 2a^2x\sqrt{a^2b' + \mu^2} \ldots \ (279).$$

Cette équation est celle d'une section conique ou courbe du second ordre; elle appartiendra à une ellipse ou à une hyperbole, selon que b', d'où dépend le signe du terme en x^2, sera négatif ou positif; car, dans le premier cas, les deux carrés des coordonnées seront de mêmes signes, et, dans le second, ils seront de signes contraires. Mais, si b' est nul, le terme x^2 s'évanouissant, l'équation appartiendra à la parabole.

411. Lorsque dans l'équation (278) on introduit le rayon vecteur à l'aide de la première des équations (277), on la transforme en

$$\mu r = a^2 - x\sqrt{a^2b' + \mu^2},$$

ce qui montre qu'en regardant $\sqrt{a^2b' + \mu^2}$ comme une constante, ce rayon vecteur est toujours donné en fonction rationnelle de l'abscisse x; d'où l'on peut conclure que l'origine est au foyer.

412. Ainsi voilà la seconde loi de Képler démontrée avec une généralité qui était inconnue à ce grand homme; car il s'était borné, et

encore par induction, à assigner aux planètes une orbe elliptique, tandis que, d'après notre démonstration, on voit que des corps planétaires pourraient être dirigés suivant des paraboles ou des hyperboles.

Si, dans les comètes observées jusqu'à ce jour, nous n'avons pas d'exemple de mouvemens hyperboliques, c'est que, d'après le calcul des probabilités, la chance qui donne une hyperbole sensible est très rare : « J'ai trouvé, dit M. de Laplace, qu'il y a six mille au moins à parier contre l'unité, qu'une nébuleuse qui pénètre dans la sphère d'activité du Soleil, de manière à pouvoir être observée, décrira ou une ellipse très allongée, ou une hyperbole qui, par la grandeur de son axe, se confondra sensiblement avec une parabole, dans la partie que l'on observe ; il n'est donc pas surprenant que jusqu'ici l'on n'ait point reconnu de mouvemens hyperboliques. »

413. Si, dans l'équation (279), on fait $x=0$, et $y=\frac{1}{2}p$, on aura, pour l'ordonnée qui passe par le foyer, c'est-à-dire pour le demi-paramètre,

$$\frac{1}{2}p=\frac{a^2}{\mu};$$

la même équation (279), résolue par rapport à y, donne

$$y=\pm\frac{a}{\mu}\sqrt{a^2+b'x^2-2x\sqrt{a^2b'+\mu^2}},$$

ce qui montre que toutes les ordonnées rectangulaires sont partagées en deux parties égales par l'axe des x, et que, par conséquent, cet axe ne peut être que le grand ou le petit axe ; et, comme on a vu qu'il renfermait le foyer, il est donc nécessairement le grand axe.

414. L'équation (279) se simplifiera si l'on fait

$$\sqrt{a^2b'+\mu^2}=m\ldots\ (280),$$

et si, transportant l'origine au centre, en supposant $x=x'+\alpha$, on dispose de l'indéterminée α, par la condition que le coefficient de la première puissance de x' s'évanouisse. Faisant donc cette substitution dans l'équation (279), nous trouverons, après avoir divisé par a^2,

$$\frac{\mu^2}{a^2}y^2-b'x'^2\left.\begin{matrix}-2b'\alpha\\+2m\end{matrix}\right\}x'\left.\begin{matrix}-b'a^2\\+2m\alpha\\-a^2\end{matrix}\right\}=0\ldots\ (281).$$

Égalant à zéro le coefficient de x', on a

$$\alpha=\frac{m}{b'};$$

cette valeur, étant introduite dans le dernier terme de l'équation (281), le change en

$$\frac{m^2}{b'} - a^2.$$

Or l'équation (280) nous donne

$$\frac{m^2}{b'} - a^2 = \frac{\mu^4}{b'}.$$

Mettant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (281), et supprimant le second terme qui, d'après notre équation de condition, est nul, cette équation deviendra

$$\frac{\mu^4}{a^2} y^2 - b' x'^2 + \frac{\mu^2}{b'} = 0\,;$$

et, en faisant évanouir les dénominateurs, on obtiendra

$$b' \mu^2 y^2 - a^2 b'^2 x'^2 + a^2 \mu^2 = 0 \ldots \ (282).$$

Dans cette équation l'origine des coordonnées est transportée au centre; par conséquent, si l'on égale y à zéro, et qu'on tire la racine carrée de la valeur de x'^2, on aura

$$\textit{demi grand axe} = \frac{\mu}{b'} \ldots \ (283).$$

Opérant de même à l'égard de x', on trouvera encore

$$\textit{demi petit axe} = \sqrt{-\frac{a^2}{b'}}.$$

Cette valeur est imaginaire quand b' est positif dans notre équation, aussi avons-nous vu, art. 410, que la courbe était alors une hyperbole; mais cette valeur devient réelle quand b' est négatif, et lorsque, par conséquent, la courbe est une ellipse. Dans ce cas, b' étant négatif, si l'on remplace b' par $-b'$, on aura

$$\textit{demi petit axe} = \frac{a}{\sqrt{b'}} \ldots \ (284).$$

415. Ce résultat est conforme à celui que l'on aurait trouvé par la considération que le petit axe est une moyenne proportionnelle entre le demi grand axe et le paramètre dont on a donné les valeurs.

416. Ayant ainsi déterminé les élémens principaux de notre courbe, il nous sera facile maintenant de démontrer la 3e loi de Képler. En effet, on sait qu'en désignant par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, l'aire d'une ellipse dont A et B sont le demi-grand et

le demi petit axe, a pour expression πAB. Par conséquent, si nous mettons, au lieu de A et de B, les valeurs déterminées par les équations (283) et (284), nous trouverons

$$\textit{aire de l'ellipse décrite par la planète} = \frac{\pi a \mu}{b' \sqrt{b'}} \ldots \quad (285).$$

Remplaçant μ par $\mu \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$, et observant qu'alors le second membre de l'équation (285) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\pi a}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\mu}{b'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

nous aurons

$$\textit{aire de l'ellipse décrite par la planète} = \frac{\pi a}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\mu}{b'}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or, nous avons vu qu'en désignant par t le temps qu'une planète met à parcourir l'arc du secteur LCM (fig. 182), l'équation (266) donnait Fig. 182.

$$t = \frac{2 \textit{ secteurs } \mathrm{LCM}}{a}.$$

Lorsque t sera le temps d'une révolution entière, que nous désignerons par T, le secteur LCM deviendra la surface de l'ellipse ; par conséquent, nous aurons pour ce cas,

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\mu}{b'}\right)^{\frac{3}{2}};$$

et comme l'équation (283) nous montre que $\frac{\mu}{b'}$ est le grand axe de l'ellipse, en nommant D ce grand axe, nous aurons

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \mathrm{D}^{\frac{3}{2}};$$

remettant pour μ sa valeur donnée par l'équation (270), on aura

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi \mathrm{D}^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{\mathrm{M}+m}} \ldots \quad (286).$$

De même, pour une autre planète m' qui fait une révolution entière dans un temps T' qui correspond à D' et à k', on aura encore, en observant que la masse M du Soleil est la même,

$$\mathrm{T}' = \frac{2\pi \mathrm{D}'^{\frac{3}{2}}}{k'\sqrt{\mathrm{M}+m'}} \ldots \quad (287);$$

mais, d'après la loi de Newton, les carrés des distances devant être en raison inverse des masses, nous devons avoir

$$M + m : M + m' :: k'^2 : k^2 ;$$

d'où nous tirerons

$$k' \sqrt{M + m'} = k \sqrt{M + m} ;$$

substituant cette valeur dans l'équation (287), nous aurons

$$T' = \frac{2\pi D'^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{M + m}} ;$$

comparant cette équation à l'équation (286), on en conclut

$$T : T' :: D^{\frac{3}{2}} : D'^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad T^2 : T'^2 :: D^3 : D'^3 ;$$

les carrés des révolutions sont donc comme les cubes des distances.

417. On peut aussi résoudre le problème inverse, et déduire, du cours elliptique des planètes, la loi de la raison inverse du carré de la distance. Pour cela, il faut établir que, par hypothèse, l'équation (264) se rapporte à l'ellipse; or l'équation polaire de l'ellipse étant de la forme $-Cr \cos \varphi = B^2 - Ar$, a pour différentielle

$$d\varphi = \frac{-B^2 dr}{r \sqrt{(C - A)^2 - B^4 + 2AB^2 r}} .$$

La condition d'identité de cette équation à l'équation (264) exige qu'on ait

$$r \int R dr = AB^2 = \textit{constante}, \quad \text{ou plutôt} \quad \int R dr = \frac{\textit{constante}}{r} ;$$

différentiant, supprimant dr et comprenant dans la constante le signe négatif qui l'affecte après la différentiation, il reste $R = \frac{\textit{constante}}{r^2}$, ce qui prouve la loi de la raison inverse du carré de la distance.

Du mouvement des projectiles dans le vide.

418. Un corps étant sollicité par une force accélératrice constante qui l'entraîne vers le centre de la Terre, la combinaison de cette force avec une force quelconque d'impulsion produit le mouvement des projectiles. Pour déterminer ce

mouvement, soient Ax, Ay et Az les axes coordonnés, le mobile n'étant soumis à aucune autre force accélératrice que celle de la pesanteur; si nous plaçons l'axe des z dans la direction de cette force, comme elle tendra à diminuer les coordonnées verticales, elle sera négative; ainsi, en la représentant par $-g$, nous aurons

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Ces valeurs étant mises dans les équations (184) du mouvement, page 193, les changent en

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g;$$

les deux premières étant multipliées par dt et intégrées, donnent

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b;$$

et l'on voit que les constantes a et b représentent les vitesses du mobile dans le sens des x et dans celui des y. Ce sont ces vitesses qui différencient ce mouvement du mouvement vertical, où elles sont nulles.

Multipliant ensuite par dt et intégrant, il vient

$$x = at + a', \quad y = bt + b':$$

éliminant t entre ces équations, on trouve

$$y = \frac{bx}{a} + \frac{ab' - a'b}{a}.$$

Cette équation est celle d'une droite EC (fig. 186) tracée sur le plan des x, y; par conséquent, tous les pieds des ordonnées parallèles à l'axe des z, se trouvent sur cette ligne EC; ce qui montre que la trajectoire ELC est une courbe plane. Fig. 186.

419. En résolvant de nouveau le problème dans cette dernière hypothèse, nous n'aurons besoin que de considérer deux

coordonnées, l'une y verticale, et l'autre x horizontale; et alors nous ne ferons usage que des équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Si on les multiplie par dt, on trouvera en intégrant,

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + b \ldots \quad (288).$$

Multipliant de nouveau par dt et intégrant, il viendra

$$x = at + a', \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + bt + b' \ldots \quad (289).$$

Pour déterminer les constantes, nous supposerons que le temps soit compté à partir de l'origine; alors nous aurons à la fois

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{et} \quad t = 0:$$

cette hypothèse donne

$$a' = 0, \quad \text{et} \quad b' = 0,$$

ce qui réduit les équations (289) à

$$x = at, \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + bt.$$

Mettant dans la seconde équation la valeur de t tirée de la première, nous obtiendrons

$$y = \frac{b}{a}x - \tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{a^2} \ldots \quad (290).$$

Pour déterminer a et b, les équations (288) nous montrent que ces constantes sont ce que deviennent la vitesse horizontale et la vitesse verticale du mobile, lorsque $t = 0$. Nommons donc V la vitesse initiale, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, ses composantes seront

V $\cos\alpha$ parallèlement à l'axe des x,
V $\sin\alpha$ parallèlement à l'axe des y;

donc

$$a = V\cos\alpha, \quad b = V\sin\alpha.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (290), nous aurons

$$y = x \text{ tang } \alpha - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2 \cos^2 \alpha} \ldots \quad (291).$$

420. Il est facile de reconnaître dans cette courbe une parabole qui, partant de l'origine A (fig. 187), s'élève d'abord au-dessus de l'axe des x, et se prolonge ensuite au-dessous de cet axe; car l'équation (291) étant de la forme Fig. 187.

$$y = mx - nx^2,$$

si nous faisons $y = 0$ pour avoir les points où la courbe rencontre l'axe des x, nous trouverons

$$x = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{m}{n}.$$

Or je dis que pour toute valeur de x moindre que $\frac{m}{n}$, l'ordonnée sera positive, tandis qu'elle sera négative pour toute valeur qui surpassera $\frac{m}{n}$. En effet, multipliant par nx les deux termes de l'inégalité

$$x < \frac{m}{n},$$

on trouvera $nx^2 < mx$, ce qui est la condition nécessaire pour que y soit positif. On démontrerait de la même manière que lorsqu'on a $x > \frac{m}{n}$, la valeur de y doit être négative.

421. Désignons par h la hauteur de laquelle le mobile devrait tomber pour acquérir la vitesse V, nous aurons, art. 307,

$$V = \sqrt{2gh} \ldots \quad (292);$$

au moyen de cette valeur, l'équation (291) devient

$$y = x \text{ tang } \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} \ldots \quad (293).$$

422. On appelle *amplitude* la distance de l'origine A au point B, où la courbe coupe l'axe des x. Pour la déterminer, on fera donc $y = 0$; et la valeur de x qui n'est pas nulle sera l'amplitude. Ainsi, en égalant la valeur de y à zéro, l'équation (293) nous donnera

$$x = 0, \quad \text{ou} \quad x = 4h \operatorname{tang} \alpha \cos^2 \alpha;$$

et en observant que le produit de la tangente par le cosinus est la même chose que le sinus, l'équation précédente reviendra à celle-ci

$$x = 4h \sin \alpha \cos \alpha;$$

par conséquent nous aurons

$$\textit{amplitude sous l'angle } \alpha = 4h \sin \alpha \cos \alpha \ldots \quad (294).$$

Si, dans cette équation, on remplace $2 \sin \alpha \cos \alpha$ par $\sin 2\alpha$ (*), l'équation précédente devient

$$\textit{amplitude sous l'angle } \alpha = 2h \sin 2\alpha \ldots \quad (295).$$

C'est d'après cette équation que Galilée, Blondel, Bélidor et d'autres auteurs, ont construit des tables de Balistique.

423. La hauteur du jet est la plus grande ordonnée. Pour déterminer l'abscisse qui correspond à la hauteur du jet, il faut, d'après la méthode des *maxima* et *minima*, égaler la valeur de $\frac{dy}{dx}$ à zéro, ce qui donnera

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha - \frac{x}{2h \cos^2 \alpha} = 0;$$

on tirera de cette équation

$$x = 2h \cos^2 \alpha \operatorname{tang} \alpha;$$

(*) On peut remarquer que si l'on fait $b = a$ dans la formule

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

il vient

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

et, en observant que $\cos\alpha \tang\alpha$ équivaut à $\sin\alpha$, elle deviendra

$$x = 2h \cos\alpha \sin\alpha ;$$

par conséquent l'abscisse de la hauteur du jet est la moitié de l'amplitude.

Si l'on remplace x par $2h \cos\alpha \sin\alpha$ dans l'équation (293), on trouvera pour la hauteur du jet,

$$y = h \sin^2\alpha.$$

424. Il existe toujours deux angles sous lesquels le projectile lancé dans le vide donne la même amplitude. En effet, soit α' l'angle complément de α, cette hypothèse donnera

$$\sin\alpha' = \cos\alpha, \quad \cos\alpha' = \sin\alpha.$$

Mais si le projectile est lancé sous l'angle α' au lieu de l'être sous l'angle α, on aura

$$\textit{amplitude sous l'angle } \alpha' = 4h \sin\alpha' \cos\alpha' ;$$

mettant dans le second membre de cette équation les valeurs de $\sin\alpha'$ et de $\cos\alpha'$, on la changera en

$$\textit{amplitude sous l'angle } \alpha' = 4h \cos\alpha \sin\alpha.$$

L'identité de cette expression avec celle que nous venons de trouver (équ. 294) pour l'amplitude sous l'angle α, nous montre que, dans le vide, les angles complémens l'un de l'autre ont la même amplitude.

425. On peut résoudre aussi ce problème : *Déterminer entre tous les angles sous lesquels on peut tirer un canon, quel est celui auquel correspond la plus grande amplitude.* Pour cela, il suffit de remarquer que l'amplitude étant représentée par $2h \sin 2\alpha$, le *maximum* de cette expression aura lieu pour le sinus de l'angle droit; alors $2\alpha = 100$; d'où il suit que, dans le vide, l'inclinaison de 50° (division décimale) est celle qui répond à la plus grande amplitude.

Cette hypothèse de $2\alpha = 100$ nous donne $\sin 2\alpha = 1$; par conséquent l'expression de l'amplitude se réduit alors à $2h$; ce qui nous apprend que pour l'angle de 50°, l'amplitude est égale au double de la hauteur due à la vitesse initiale.

Soit P cette amplitude, nous aurons

$$h = \tfrac{1}{2}P \ldots (296).$$

Pour déterminer le coefficient h, on tirera le canon sous un angle de 50°; et ayant mesuré l'amplitude, nous la nommerons P; alors, d'après ce qui précède, h sera donné par l'équation (296). C'est ce coefficient h qui mesurera la force de la poudre, puisque de l'intensité de cette force dépendra l'étendue de P.

426. Lorsque h sera déterminé par cette expérience, ou plus exactement par un résultat moyen entre plusieurs expériences, on mettra la valeur de h dans l'équation (293), ce qui la changera en

$$y = x \tang \alpha - \frac{x^2}{2P \cos^2 \alpha}.$$

Si nous appelons P′ l'amplitude qui correspond à l'angle α', l'équation (295) deviendra

$$P' = 2h \sin 2\alpha' \ldots (297),$$

ou plutôt, en mettant la valeur de h, donnée par l'équation (296),

$$P' = P \sin 2\alpha'.$$

Cette équation nous fera connaître l'amplitude P′ qui a lieu pour un angle donné α', lorsque la plus grande amplitude P sera connue.

En général, on peut déterminer l'amplitude P′ qui se rapporte à un angle α', en mesurant l'amplitude P″ qui a lieu sous un angle α''; car puisqu'on a

$$P' = P \sin 2\alpha', \quad P'' = P \sin 2\alpha'';$$

en divisant ces valeurs l'une par l'autre, on trouvera

$$\frac{P'}{P''} = \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha''};$$

par conséquent, si l'on a mesuré l'amplitude P″ sous un angle α'', on connaîtra, au moyen de l'équation précédente, l'amplitude P′ qui se rapporte à un angle donné α'.

427. La valeur de h (équation 296) étant substituée dans l'équation (292), nous trouverons pour la vitesse initiale

$$V = \sqrt{Pg} = \sqrt{P \times 9^m,809}.$$

Par exemple, si l'amplitude sous l'angle de 50° était de 108 mètres, on trouverait

$$V = \sqrt{108 \times 9^m,809} = \sqrt{1059^m,372} = 32^m,55 \text{ environ.}$$

428. Si, au contraire, on donnait la vitesse initiale ainsi que l'angle de projection, on pourrait trouver l'amplitude; par exemple, si la vitesse initiale était de 200 mètres par seconde, et l'angle de 30°, on déterminerait d'abord h par la formule suivante, tirée de l'équation (292),

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{200^2}{2(9^m,809)} = \frac{40000}{19,618} = 2038,94.$$

Appelons P′ l'amplitude cherchée, l'équation (297) donnerait

$$P' = 2 \times 2038^m,94 \times \sin 60°.$$

429. Le problème du jet des bombes peut s'énoncer ainsi: Connaissant la force de la poudre, ainsi que les coordonnées $x' = AB$ (fig. 188) et $y' = BC$ d'un point C sur lequel on veut lancer le projectile, déterminer l'angle de projection qu'il faut donner au projectile pour qu'il atteigne le but. La force de la poudre étant donnée par la vitesse initiale du projectile, en une seconde de temps, supposons que cette vitesse soit de 600 mètres par seconde, en faisant donc V = 600 dans l'équat. (292), Fig. 188.

nous avons

$$600^m = \sqrt{2gh} = \sqrt{2h \times 9,809}.$$

Cette équation nous fera connaître h. Cela posé, x' et y' devant satisfaire à l'équation (291), nous aurons, en mettant ces valeurs à la place de x et de y,

$$y' = x' \operatorname{tang} \alpha - \frac{x'^2}{4h \cos^2 \alpha} \ldots \quad (298).$$

Tout étant connu dans cette équation, hors l'angle α, nous ferons $\operatorname{tang} \alpha = z$, et nous aurons

$$\cos \alpha = \frac{1}{\text{séc.}\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (298), on trouvera

$$y' = x'z - \frac{x'^2}{4h}(1 + z^2) \ldots \quad (299).$$

Cette équation étant résolue par rapport à z, nous donnera pour z les valeurs qui doivent déterminer les deux angles de projection sous lesquels le projectile doit être lancé pour atteindre le point C : on choisira le plus grand de ces angles lorsqu'il s'agira d'écraser un objet.

Au lieu de CB, on peut donner l'angle CAB, sous lequel est vu CB. Soit φ cet angle, on a

$$CB = x' \operatorname{tang} \varphi = y';$$

cette valeur de y' étant substituée dans l'équation (299), x' devient facteur commun, et l'on a, en le supprimant,

$$\operatorname{tang} \varphi = z - \frac{x'}{4h}(1 + z^2),$$

équation qui donne

$$z = \frac{2h}{x'} \pm \sqrt{\frac{4h^2}{x'^2} - \frac{4h \operatorname{tang} \varphi}{x'} - 1},$$

Des Projectiles dans un milieu résistant.

430. La théorie des projectiles qui sont lancés dans le vide est loin de s'accorder avec l'expérience, surtout lorsque la vitesse est très grande; car la résistance de l'air ralentit continuellement le mouvement du projectile. Nommons R cette résistance; si, comme dans l'art. 318, nous supposons qu'elle soit proportionnelle au carré de la vitesse, nous aurons

$$R = mv^2.$$

R devant être contraire au mouvement du projectile, agira suivant l'élément de la trajectoire, mais dans un sens opposé à celui de la vitesse; par conséquent R fera, avec les axes coordonnés, les mêmes angles que l'élément ds forme avec ces axes. Ainsi, en supposant que α, β, γ, soient les angles que ds forme avec les axes coordonnés, les composantes de R seront Fig. 189.

$$R \cos\alpha, \quad R \cos\beta, \quad R \cos\gamma.$$

Pour déterminer ces angles, représentons par mm' (fig. 189) l'élément ds de la trajectoire; la projection de cet élément sur l'axe des z sera égale à $m'n$. Or le triangle $m'mn$ nous donne la proportion

$$1 : \cos mm'n :: mm' : m'n,$$

ou

$$1 : \cos\gamma :: ds : dz;$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

par conséquent la composante de R suivant l'axe des z aura pour valeur absolue

$$R\frac{dz}{ds}.$$

Nous affecterons cette composante du signe négatif, parce que lorsque le projectile vient de m en m', la force R agit de m' en m, et tend à diminuer les coordonnées du mobile, ce qui rend chaque composante de R négative.

431. Une même démonstration pouvant s'appliquer aux autres composantes de R, nous aurons

$-\mathrm{R}\frac{dx}{ds}$ pour la composante de R suivant l'axe des x,

$-\mathrm{R}\frac{dy}{ds}$ pour la composante de R suivant l'axe des y.

Ainsi les équations du problème seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{R}\frac{dx}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\mathrm{R}\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g-\mathrm{R}\frac{dz}{ds}.$$

En divisant les deux premières équations l'une par l'autre, on éliminera dt^2, ce qui donnera

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tirera

$$\frac{d^2y}{dy}=\frac{d^2x}{dx}\ldots\ (300);$$

et en intégrant par logarithmes,

$$\log dy=\log dx+\log a=\log adx.$$

Passant aux nombres,

$$dy=adx\ (*);$$

(*) Voici une manière plus régulière de parvenir au même résultat :

intégrant de nouveau, on trouve

$$y = ax + b;$$

donc la projection de la trajectoire sur le plan des xy étant une ligne droite, cette trajectoire est dans un plan vertical.

432. Si nous mettons de nouveau le problème en équation avec cette condition de plus, que la courbe soit plane, nous n'aurons besoin que d'employer les équations suivantes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - R\frac{dy}{ds} \text{ (*)},$$

---

l'équation (300) réduite au même dénominateur, nous donne

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dxdy} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2 \cdot \frac{dy}{dx}} = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d.\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = 0;$$

intégrant, on trouve

$$\log\frac{dy}{dx} = \log a;$$

passant aux nombres, on a

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \text{donc} \quad dy = adx.$$

(*) Nous avons dit que la résistance de l'air diminuait les coordonnées de la courbe, parce que nous supposions que le mobile M était dans la branche ascendante. S'il était dans la branche descendante, la résistance de l'air agissant dans le sens de M″ en M′ (fig. 189), tendrait à diminuer Fig. 189.
x et à augmenter y. Il semble donc que $R\frac{dy}{ds}$ devrait changer de signe; mais comme dy devient négatif dans cette branche, la composante verticale sera encore représentée par $-R\frac{dy}{ds}$.

ou, en mettant la valeur de R,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - mv^2\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - g - mv^2\frac{dy}{ds}.$$

Nous pourrons éliminer l'une des variables en remplaçant v^2 par sa valeur donnée par l'équation

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2},$$

et nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - m\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dx}{ds} \ldots \quad (301),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - g - m\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dy}{ds} \ldots \quad (302).$$

433. La première de ces équations étant multipliée par dt, donne

$$\frac{d^2x}{dt} = - mds\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt},$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt} = - mds\frac{dx}{dt}:$$

on tire de cette équation,

$$\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = - mds,$$

et, en intégrant, on obtient

$$\log\frac{dx}{dt} = - ms + \mathrm{C}.$$

434. Soient A le nombre dont C est le logarithme, et e la

base du système népérien, nous avons

$$C = \log A, \quad \text{et} \quad \log e = 1;$$

par conséquent, nous pourrons changer l'équation précédente en celle-ci,

$$\log \frac{dx}{dt} = - ms \log e + \log A;$$

cette équation revient à

$$\log \frac{dx}{dt} = \log e^{-ms} + \log A = \log Ae^{-ms};$$

passant aux nombres, on a

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-ms} \ldots \quad (303).$$

435. Pour déterminer la constante A, soit V la vitesse initiale, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x. La composante de V, suivant cet axe, sera V cos α. Or, quand $s = 0$, $\frac{dx}{dt}$ exprime la composante de la vitesse initiale dans le sens des x. Ainsi, dans ce cas, l'équation précédente se réduit à

$$V \cos \alpha = Ae^{0} = A.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (303), on a

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha \, e^{-ms} \ldots \quad (304).$$

436. Cette équation contenant trois variables, nous ne chercherons pas à l'intégrer; mais nous la conserverons pour éliminer le temps, lorsque nous aurons trouvé une autre relation entre ces variables. Pour y parvenir, nous observerons que nous n'avons encore fait usage que de l'équation (301); ainsi il nous reste la faculté d'employer l'équation (302), et de la combiner avec l'équation (301). Pour cet effet, on peut mettre ces

équations sous la forme

$$\frac{dx}{ds} = \frac{-\frac{d^2x}{dt^2}}{m\frac{ds^2}{dt^2}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{-\left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)}{m\frac{ds^2}{dt^2}},$$

et l'on voit que pour éliminer ds, il suffit de les diviser l'une par l'autre. En opérant ainsi, l'on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g + \frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Cette équation nous donne

$$g = \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2};$$

réduisant au même dénominateur et multipliant par dt^2, on obtiendra

$$gdt^2 = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dx} \dots \quad (305).$$

Le second membre de cette équation étant divisé par $-dx$, devient la différentielle de $\frac{dy}{dx}$; par conséquent, on peut écrire ainsi l'équation (305)

$$gdt^2 = -dxd\left(\frac{dy}{dx}\right) \ (*).$$

(*) J'ai cherché à parvenir au même résultat de la manière suivante. Représentons l'équat. (308) par $ds = dx\text{P}$, et mettons cette valeur de ds dans les équations (301) et (302), et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par p, nous obtiendrons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{dx^2}{dt^2}\text{P}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - m\frac{dx^2}{dt^2}\text{P}p.$$

Faisant pour simplifier, $\frac{dy}{dx} = p$, il viendra

$$gdt^2 = -dxdp \ldots \quad (306).$$

Éliminant dt^2 au moyen de l'équation (304), on trouvera

$$g = -V^2 \cos^2 \alpha\, e^{-2ms} \cdot \frac{dp}{dx} \ldots \quad (307).$$

437. Cette équation contient encore trois variables ; mais l'élément de la courbe nous fournit entre les mêmes variables, la relation $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou, en mettant pour dy sa valeur pdx,

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2} \ldots \quad (308);$$

par conséquent, en éliminant dx entre cette équation et l'équation (307), nous obtiendrons

$$dp \sqrt{1 + p^2} = -\frac{ge^{2ms}ds}{V^2 \cos^2 \alpha} \ldots \quad (309).$$

Intégrant cette équation (*note dixième*), on trouve

$$\tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\log(p + \sqrt{1+p^2}) = C - \frac{ge^{2ms}}{2m V^2 \cos^2 \alpha} \ldots (310).$$

Pour éliminer les derniers termes de ces équations, nous multiplierons la première par p, et la retranchant de l'autre, nous trouverons

$$\frac{d^2y - pd^2x}{dt^2} = -g,$$

ou

$$d^2y - \frac{dy}{dx}d^2x = -gdt^2;$$

réduisant au même dénominateur, on a

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx} = -gdt^2$$

ou

$$dxd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -gdt^2$$

Faisant $C = \frac{1}{2}A$, et supprimant le diviseur commun 2, on a enfin

$$p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = A - \frac{ge^{2ms}}{mV^2\cos^2\alpha} \dots (311).$$

Pour déterminer la constante A, nous remarquerons que la valeur $\frac{dy}{dx}$ de p est la tangente trigonométrique de l'angle que l'élément de la courbe fait avec l'axe des x. Si nous appelons α
Fig. 189. cet angle à l'origine qu'on suppose placée au point A (fig. 189), où se trouve le projectile lorsque t est nul, nous aurons en même temps

$$x = 0, \quad y = 0, \quad s = 0, \quad \text{et} \quad p = \tang \alpha.$$

Substituant ces valeurs de s et de p dans l'équation précédente, on trouvera

$$A = \tang\alpha\sqrt{1+\tang^2\alpha} + \log(\tang\alpha + \sqrt{1+\tang^2\alpha}) + \frac{g}{mV^2\cos^2\alpha};$$

on regardera donc la constante de l'équation (311) comme une quantité connue.

438. Si l'on élimine e^{2ms} entre l'équation (311) et celle que nous avons marquée par le n° 303, on obtiendra

$$dx = \frac{dp}{m[p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - A]} \dots (312).$$

Multipliant cette équation terme à terme par celle-ci,

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

on trouvera

$$dy = \frac{pdp}{m[p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - A]} \dots (313).$$

439. Pour déterminer le temps, l'équation (306) donne

$$dt^2 = -\frac{dpdx}{g}.$$

Mettant dans cette équation la valeur de dx, on a

$$dt^2 = \frac{-dp^2}{mg[p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - A]} \dots (314),$$

ou, en changeant les signes du numérateur et du dénominateur,

$$dt^2 = \frac{dp^2}{mg[-p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2}) + A]}.$$

Passant à la racine carrée, le second membre de cette équation devra en général être affecté du double signe ; mais, dans notre cas, nous choisirons le signe négatif, parce qu'on sait que toute équation entre deux variables t et p pouvant être considérée comme celle d'une courbe dont t serait l'abscisse et p l'ordonnée, si en même temps que t augmente, p diminue, on doit avoir dt et dp de signes contraires (*). Or, dans le cas présent, il est évident qu'à mesure que le temps t augmente, p

(*) On pourrait le démontrer de cette manière : soit $t = fp$, si p diminue de h, t devient $t' = f(p-h)$; développant par la formule de Taylor, on trouve

$$t' - t = -\frac{dp}{dt}.h + \frac{d^2p}{dt^2}.\frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3p}{dt^3}.\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Par hypothèse, t s'accroissant quand p diminue, $t'-t$ est une quantité positive ; il en est de même de $-\frac{dp}{dt}.h + \text{etc.}$ Or, en prenant h assez petit pour que le premier terme du développement de $t'-t$ décide du signe de ce développement, il faut que $-\frac{dp}{dt}h$ soit un nombre positif, ce qui ne peut être à moins que $\frac{dp}{dt}$ ne représente une quantité négative, car le facteur h est essentiellement positif. Donc dp et dt sont de signes contraires.

qui est la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'élément de la courbe avec la parallèle à l'axe des x, diminue dans la branche ascendante, qui est celle que nous considérons; donc

$$dt = -\frac{dp}{\sqrt{mg[-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})+A]}} \ldots (315).$$

440. Il nous sera aussi facile de trouver l'expression de la vitesse en fonction de p; car la vitesse nous étant donnée par l'équation

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+p^2},$$

en remplaçant dx et dt par leurs valeurs, on trouvera

$$v = \frac{\sqrt{\frac{g}{m}} \times \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})+A}}.$$

441. On peut aussi exprimer l'arc s en fonction de p : en effet, l'équation (311) nous donne

$$e^{2ms} = \frac{mV^2\cos^2\alpha}{g}[A-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})].$$

Prenant les logarithmes, changeant l'exposant de e en coefficient, et remplaçant $\log e$ par l'unité, on obtiendra

$$s = \frac{\log\left\{\frac{V^2m\cos^2\alpha}{g}[A-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})]\right\}}{2m}.$$

442. Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faudrait intégrer les équations (312) et (313) : on n'y a pu réussir jusqu'à présent, du moins sans recourir aux séries. Cela n'empêche pas qu'on ne puisse construire approximativement la trajectoire par points au moyen des équations (312) et (313).

Pour parvenir à ce but, nous les mettrons sous la forme

$$dx = \varphi p \cdot dp \ldots (316),$$
$$dy = \psi p \cdot dp \ldots (317).$$

En ne considérant d'abord que la première, elle donne

$$\frac{dx}{dp} = \varphi p,$$

et nous voyons que $\frac{dx}{dp}$ n'est autre chose que la tangente trigonométrique d'une courbe dont p serait l'abscisse et x l'ordonnée. C'est cette courbe que nous allons d'abord chercher à construire, parce que nous nous en servirons ensuite pour déterminer les différens points de la trajectoire. Nous la distinguerons de celle-ci en la nommant *courbe auxiliaire*.

Ayant donc mené deux axes rectangulaires Ap et Ax (fig. 190), Fig. 190.
on portera de A en B une droite $AB = \tang \alpha$, et le point B appartiendra à la courbe auxiliaire, puisque (art. 437) l'ordonnée $x = 0$ correspond à l'abscisse $p = \tang \alpha$. Si l'on partage ensuite AB en parties égales BB′, B′B″, B″B‴, etc., et qu'on représente l'une de ces parties par dp, il sera facile de construire approximativement les points M′, M″, M‴, etc., de la courbe auxiliaire qui correspondent aux points B′, B″, B‴, etc. En effet, si l'on suppose que les points B, B′, B″, etc., soient très rapprochés, on pourra regarder les arcs de courbe M′B, M″M′, M‴M″, etc., comme se confondant avec les tangentes M′B, M″M′, M‴M″ qui seraient menées aux points M′, M″, M‴, etc. Cela suffit pour pouvoir calculer les ordonnées M′B′, M″B″, M‴B‴, etc. En effet, la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'élément de la courbe avec la parallèle à l'axe des p, étant en général $\frac{dx}{dp}$, sa valeur nous sera toujours donnée par l'équation (316), dès que nous aurons fixé la valeur de l'abscisse p. Ainsi, lorsqu'on veut avoir la tangente trigonométrique de l'angle M′Bp, formé par la tangente en M′ avec l'axe

des abscisses, comme l'abscisse du point M' est $AB' = AB - BB' = \text{tang}\,\alpha - dp$, il faudra changer p en $\text{tang}\,\alpha - dp$ dans la valeur φp de $\frac{dx}{dp}$ donnée par l'équation (316); et $\frac{dx}{dp}$ deviendra

$$\text{tang}\, M'Bp = \varphi\,(\text{tang}\,\alpha - dp)\,;$$

donc

$$\text{tang}\, M'BB'' = -\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - dp).$$

Cela posé, l'ordonnée M'B' ayant pour expression....... $BB' \times \text{tang}\, M'BB'$, nous aurons

$$M'B' = BB' \times \text{tang}\, M'BB',$$

ou

$$M'B' = dp \times -\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - dp).$$

Ainsi l'on construira le point M' de la courbe auxiliaire BC au moyen des coordonnées

$$AB' = \text{tang}\,\alpha - dp,$$

et

$$B'M' = dp \times -\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - dp).$$

Pour déterminer un troisième point M'', on prendra ..... $AB'' = \text{tang}\,\alpha - 2dp$; et par le même raisonnement, on prouvera que la tangente trigonométrique de l'angle M''M'O a pour expression $-\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - 2dp)$, et que par conséquent

$$M''O = dp \times -\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - 2dp)\,;$$

mettant cette valeur et celle de M'B' dans l'équation

$$M''B'' = M'B' + M''O,$$

on trouvera

$$M''B'' = -dp \cdot \varphi\,(\text{tang}\,\alpha - dp) - dp\,\varphi\,(\text{tang}\,\alpha - 2dp).$$

Pour calculer l'ordonnée M'''B''' qui correspond à l'abscisse $AB''' = \text{tang}\,\alpha - 3dp$, il suffira d'ajouter à la valeur de M''B'' celle de M'''O' qui, d'après ce qui précède, équivaut

à $-dp.\varphi(\tang\alpha - 3dp)$, et l'on aura

$$B'''M''' = -dp.\varphi(\tang\alpha - dp) - dp.\varphi(\tang\alpha - 2dp) - dp.\varphi(\tang\alpha - 3dp).$$

C'est ainsi qu'on déterminera une suite de points qui appartiendront à la courbe auxiliaire dont les coordonnées sont p et x. Conduisant par ces points des lignes droites, on formera un polygone BM'M''M''', etc., qui s'approchera d'autant plus de la courbe, que dp aura moins d'étendue.

En opérant de la même manière à l'égard de l'équation $dy = \psi p.dp$, on construira une seconde courbe auxiliaire BD, dans laquelle les coordonnées seront p et y. Les ordonnées, telles que mb et lb qui, dans ces deux courbes auxiliaires, appartiennent à une même abscisse p, seront les ordonnées de la trajectoire. De sorte qu'en prenant pour abscisses de la trajectoire les ordonnées B'M', B''M'', B'''M''', etc., de la première courbe, les ordonnées de la trajectoire seront B'L', B''L'', B'''L''', etc.

Des différentes manières de mesurer les forces, et de ce qu'on entend par force vive.

443. Nous avons vu, art. 296, que deux forces F et F' appliquées à un même mobile, étaient entre elles comme les vitesses qu'elles communiquent à ce mobile. Considérons maintenant ces forces lorsqu'elles sont appliquées à des masses différentes, et supposons d'abord que deux forces égales et directement opposées agissent sur deux masses M et M', égales et sphériques; elles communiqueront à ces masses deux vitesses V et V' qui seront égales. M et M', en se rencontrant, se presseront mutuellement, et se mettront en équilibre, parce que tout est égal de part et d'autre. Mais si l'on avait $M = nM'$ et que V' surpassât V, on regarderait M comme composé des masses m', m'', m'''... $m^{(n)}$ égales chacune à M'. Il est certain qu'en vertu

de la liaison mutuelle des parties qui composent les solides, l'une de ces masses ne pourrait se mouvoir sans entraîner les autres; de sorte que si le mobile M devait parcourir par exemple trois mètres par seconde, chacune des masses m', m'', m''', etc., parcourrait aussi trois mètres par seconde, ce qui revient à dire que si V est la vitesse de M, les masses m', m'', m''', etc., auront chacune la même vitesse V. Or si m', animé de la vitesse V, vient choquer la masse M' qui, par hypothèse, lui est égale, elle détruira dans V' une vitesse égale à V; et si dans le même temps m'', agissant par l'intermédiaire des autres masses, choque aussi M', elle détruira encore une partie V de V', et ainsi de suite pour les autres masses. De sorte que toutes ces masses réunies détruiront spontanément dans V' une vitesse égale à nV; et en supposant que la vitesse V' soit alors épuisée, il y aura équilibre; il faudra donc que, dans ce cas, on ait $V' = nV$. Éliminant n entre cette équation et l'équation $M = nM'$, on obtiendra la proportion

$$M : M' :: V' : V,$$

qui nous apprend que lorsqu'une masse M contient n fois la matière d'une autre, ces masses doivent être en raison inverse de leurs vitesses, pour qu'elles puissent se faire équilibre.

444. Cette proposition a encore lieu lorsque M ne renferme pas M' un nombre juste de fois : c'est ce qu'il serait facile de démontrer (*note onzième*) par la considération des infiniment petits, ou par la méthode des limites.

445. Il suit de ce qui précède, que, puisque les vitesses de deux corps sont en raison inverse des nombres de particules matérielles qu'ils contiennent, il faut, lorsque ces corps sont de mêmes volumes et de densités différentes, que leurs vitesses soient en raison inverse de leurs densités.

446. Supposons maintenant que la force F qui imprime à la masse M la vitesse V, agisse sur une masse qui soit M fois

plus petite, et qui par conséquent pourra être représentée par $\frac{M}{M} = 1$, cette force communiquera à la masse 1 une vitesse qui vaudra M fois celle que F communiquerait à M ; cette vitesse sera donc exprimée par MV.

Par la même raison, la force F′ qui communique à M′ la vitesse V′, communiquera à la masse $\frac{M'}{M'} = 1$, une vitesse M′V′.

Les vitesses MV et M′V′ étant celles qui sont communiquées par les forces F et F′ à une même masse 1, il suit du principe des vitesses proportionnelles aux forces, article 296, que l'on a

$$F : F' :: MV : M'V'.$$

Les expressions MV et M′V′ sont ce qu'on appelle les *quantités de mouvement* communiquées par les forces F et F′ aux mobiles M et M′.

447. L'unité de force étant arbitraire, nous pouvons la représenter par la quantité de mouvement qu'elle communique au mobile. Ainsi, en supposant que F′ soit cette unité de force, nous remplacerons F′ par M′V′ dans la proportion précédente, et nous en conclurons

$$F = MV.$$

448. Si nous considérons la force φ qui agit instantanément, nous avons vu, art. 296, que cette force était représentée par la vitesse qu'elle communiquerait au mobile dans l'unité de temps, si le mouvement devenait tout-à-coup uniformément accéléré; nous aurons donc, en mettant pour V sa valeur φ,

$$F = M\varphi.$$

Cette équation nous apprend encore que φ est la force qui agit sur l'unité de masse; car si l'on fait $M = 1$, on a

$$F = \varphi.$$

φ étant la force accélératrice, F est celle qu'on appelle la force motrice.

449. Nous avons vu, art. 163, qu'en nommant g la force de la pesanteur, P le poids du corps, et M sa masse, on avait

$$P = Mg;$$

si, entre cette équation et la précédente, on élimine M, on trouvera

$$F = P\frac{\varphi}{g};$$

de sorte que lorsque la force accélératrice φ est celle de la pesanteur, $\varphi = g$, et l'équation précédente se réduit à

$$F = P.$$

Dans ce cas, la force accélératrice est donc évaluée par le poids du corps sur lequel elle agit.

450. Il y eut autrefois entre les géomètres une dispute célèbre sur la mesure des forces. Cette dispute, comme beaucoup d'autres, provenait de ce qu'on ne s'entendait pas sur la définition des mots.

Une force ne nous étant connue que par ses effets, peut être mesurée de différentes manières, suivant l'usage auquel on veut l'approprier. Par exemple, si l'on se propose de déterminer le fardeau qu'un homme peut soutenir instantanément, il est évident que la force de cet homme sera proportionnelle au poids qu'il sera capable de soutenir, et par conséquent pourra être représentée par ce poids : mais si l'on veut mesurer la force de cet homme par le travail qu'il peut exécuter dans un temps donné, on aura une autre manière d'évaluer sa force, et qui sera entièrement différente de l'autre; car on sent qu'un homme plus faible pourrait, avec plus d'aptitude à soutenir une longue fatigue, donner dans son travail un plus grand résultat, et, sous ce point de vue,

être censé animé d'une plus grande force que l'autre. Dans cette seconde manière de considérer la force d'un homme, nous la regarderons comme proportionnelle au poids qu'il soulève, et à la hauteur à laquelle il l'aura élevé dans un temps donné; bien entendu qu'on ne suppose pas que l'effort varie à raison de la hauteur, parce que, dans le fond, cette hauteur ne représente ici que le nombre de fois qu'un certain travail est répété. Ainsi, en supposant que deux hommes élèvent dans une journée de travail le même poids, l'un à 600 mètres de haut, et l'autre à 200 mètres, dans cette manière d'estimer la force, nous regarderons l'un de ces hommes comme ayant trois fois autant de force que l'autre. Il suit encore de là que si, dans la même journée de travail, deux hommes élevaient, le premier 20 kilogrammes à 200 mètres, et le second 10 kilogrammes à 400 mètres, on les regarderait, dans la présente hypothèse, comme ayant des forces égales, quoique réellement les forces intrinsèques de ces hommes puissent être très différentes; mais nous ne les considérerons ici que sous le rapport du travail produit.

C'est de cette manière que Descartes estime la force d'un homme ou de tout autre moteur. La dispute qui le divisait d'opinion avec d'autres géomètres, ne roulait que sur la définition du mot *force*. Il prétendait qu'une force devait s'évaluer par le produit de la masse, par le carré de la vitesse. Nous allons voir comment, lorsque l'on considère les corps en mouvement, la définition de Descartes, du mot *force*, peut conduire à cette conséquence.

Soit P le poids soulevé, et h la hauteur à laquelle il doit être élevé dans un temps donné; la force, dans l'hypothèse de Descartes, sera donc mesurée par le produit

$$P \times h.$$

On peut, dans cette expression, remplacer P par sa valeur Mg, art. 163, et l'on aura

$$Ph = Mgh;$$

multipliant par 2, il viendra

$$2Ph = M \times 2gh;$$

observant que le carré de la vitesse v due à la hauteur h, a pour expression $2gh$, art. 307, on peut remplacer $2gh$ par v^2, ce qui donne

$$2Ph = Mv^2.$$

Ayant défini le mot *force* autrement que Descartes, nous ne dirons pas comme lui, que Mv^2 est la mesure d'une force, parce que nous avons vu, art. 447, qu'une force devait être représentée par la quantité de mouvement Mv qu'elle produit. Ainsi, pour éviter toute équivoque, nous emploierons une nouvelle dénomination en donnant, suivant l'usage, le nom de *force vive*, au produit Mv^2 de la masse par le carré de la vitesse.

451. Les forces vives peuvent être d'une grande utilité lorsqu'il s'agit de mesurer l'effet ou la dépense d'une machine. S'agit-il, par exemple, de disposer d'une chute d'eau, de faire mouvoir un chariot sur un terrain donné, de comprimer une masse d'air, de faire sortir d'une mine une certaine quantité de combustibles, etc., dans tous ces cas, on peut ramener l'effet de la force motrice au produit d'un certain poids par une longueur donnée; par conséquent, à une expression de la forme Ph, dont le double, comme nous venons de le démontrer, revient au produit Mv^2.

Du choc direct des corps.

452. Nous diviserons les corps en corps durs et en corps élastiques : un corps dur est celui qui, après le choc, ne change pas de figure; un corps élastique est celui qui, étant compressible, reprend après le choc sa figure primitive en vertu d'une force qui réside dans ce corps.

Tous les corps participent plus ou moins de ces deux états,

que nous regardons comme des limites entre lesquelles ces corps sont placés.

Du choc des corps durs.

453. Soient M et M′ (fig. 191) deux corps durs sphériques Fig. 191.
qui se meuvent dans le sens de A vers C. Si M va plus vite que M′, il l'atteindra, et alors les mobiles se comprimeront réciproquement, jusqu'à ce qu'ils soient animés d'une vitesse commune.

Nommons F et F′ les forces qui ont communiqué aux mobiles M et M′, les vitesses V et V′. Comme ces forces peuvent être représentées par les quantités de mouvement qu'elles impriment aux mobiles, art. 447, nous aurons

$$F = MV, \quad F' = M'V':$$

or, d'après le principe de la composition des forces, celles qui suivent la même direction devant s'ajouter lorsqu'elles agissent dans le même sens, nous écrirons

$$F + F' = MV + M'V'.$$

Nous avons une autre expression de $F + F'$; car soit v la vitesse commune de ces corps après le choc; on peut regarder $M + M'$ comme un seul corps qui, en vertu de la force $F + F'$, a acquis la vitesse v. Nous aurons donc encore

$$F + F' = (M + M')v.$$

De ces équations nous tirerons

$$(M + M')v = MV + M'V';$$

d'où nous conclurons

$$v = \frac{MV + M'V'}{M + M'}.$$

454. Lorsque les corps vont à la rencontre l'un de l'autre,

V′ est négatif, et l'on a

$$v = \frac{MV - M'V'}{M + M'}.$$

Si le corps M′ était en repos lorsque M vient le choquer, V′ serait nul, et les formules précédentes se réduiraient à

$$v = \frac{MV}{M + M'}.$$

Du choc des corps élastiques.

455. Examinons d'abord les circonstances du phénomène de l'élasticité dans un corps sphérique, qui, sollicité par une
Fig. 192. force perpendiculaire au plan inébranlable AB (fig. 192), serait lancé sur ce plan. Dès l'instant que le corps atteindra le plan AB, le diamètre ED, par la force de la compression, se raccourcira et le point D se rapprochera du centre C, tandis que les sections perpendiculaires à ED s'enfleront. Le point D s'arrêtera dans ce mouvement, lorsque la vitessse du corps sera totalement épuisée; alors, en vertu de l'élasticité, cette vitesse renaîtra successivement en sens contraire, jusqu'à ce que le corps ait repris sa forme primitive. Il suit de là que lorsque le mobile sera revenu à son point de départ, il aura acquis une vitesse égale à sa vitesse primitive, mais qui agira en sens contraire.

456. Considérons maintenant le choc de deux corps élas-
Fig. 191. tiques M et M′ (fig. 191), que nous supposerons aller dans le même sens. Ces corps devant s'atteindre, il faudra que la vitesse V de M surpasse la vitesse V′ de M′. Cela posé, ces corps, en se choquant, se comprimeront de plus en plus, jusqu'à ce que, parvenus au *maximum* de la compression, ils aient acquis une vitesse commune; de sorte qu'un point
Fig. 193. matériel D du corps M (fig. 193) qui, en vertu de la seule vitesse V, aurait décrit la ligne DE, retardé dans son mouve-

ment par l'effet de la compression, au lieu d'être arrivé en E à l'instant du *maximum* de la compression, ne sera parvenu qu'en F; alors la force élastique commençant à agir sur le point matériel, lui communiquera dans le sens de F en G, une vitesse égale à celle qu'il a perdue par la compression, et qui le ramènera à l'extrémité G d'une ligne FG égale à FE. La vitesse du mobile étant la même pour tous les points matériels qui le composent, art. 443, si nous représentons cette vitesse avant le choc par DE, nous pourrons conclure qu'après ce choc, elle sera réduite à

$$DE - GE = DE - 2FE.$$

457. Pour exprimer analytiquement les circonstances que nous venons d'examiner, nommons u la vitesse commune qui, au moment du *maximum* de la compression, anime tous les points des deux mobiles. Nous pourrons en cet instant regarder ces mobiles comme durs, et nous aurons pour déterminer u, l'équation

$$u = \frac{MV + M'V'}{M + M'} \ldots (318).$$

La vitesse perdue par le corps M en vertu de cette compression, étant égale à la vitesse V qu'avait le corps moins celle qui lui reste, sera exprimée par $V - u$.

Telle serait la vitesse qu'aurait perdue le corps au *maximum* de la compression, si la force élastique n'existait pas; mais cette force commençant dès-lors à agir, fait perdre encore au mobile $V - u$; de sorte que la perte totale de vitesse du corps M sera $2(V - u)$. Appelons v la vitesse après le choc; nous aurons donc pour déterminer v, l'équation

$$v = V - 2(V - u),$$

ou, en réduisant,

$$v = 2u - V \ldots (319).$$

A l'égard de M', ce mobile parvenu au *maximum* de la com-

pression, devra être considéré comme corps dur, et par conséquent aura gagné une vitesse représentée par $u - V'$; car il est évident que cette vitesse gagnée est égale à la vitesse acquise, moins celle que le corps avait. C'est alors que l'élasticité commençant à agir, l'entraînera de manière à l'écarter du point de contact, et lui fera gagner encore $u - V'$; d'où il suit que la vitesse de M' après le choc, sera

$$V' + 2(u - V') = 2u - V'.$$

Appelant v' cette vitesse, nous aurons

$$v' = 2u - V' \ldots (320).$$

Mettant dans les équations (319) et (320) la valeur de u donnée par l'équation (318), nous obtiendrons enfin

$$v = \frac{2(MV + M'V')}{M + M'} - V, \quad v' = \frac{2(MV + M'V')}{M + M'} - V',$$

et en réduisant, on trouvera

$$v = \frac{V(M - M') + 2M'V'}{M + M'}, \quad v' = \frac{V'(M' - M) + 2MV}{M + M'} \ldots (321).$$

Si $M = M'$, on a

$$v = V', \quad \text{et} \quad v' = V \ldots (322).$$

La première de ces équations nous apprend que la vitesse de M, après le choc, est la même que celle de M' avant le choc; la seconde nous conduisant à des conséquences analogues, concluons que, dans le cas où $M = M'$, les mobiles changent de vitesses après le choc.

458. Lorsque le mobile M' va à la rencontre de M, il faut faire V' négatif dans les formules précédentes; et l'on a

$$v = \frac{V(M - M') - 2M'V'}{M + M'}, \quad v' = \frac{V'(M - M') + 2MV}{M + M'} \ldots (323).$$

459. On peut supposer que les mobiles qui vont à la ren-

contre l'un de l'autre soient égaux ; alors dans les équations précédentes on fera $M = M'$, ce qui les réduira à

$$v = -V', \quad v' = V. \quad (324);$$

d'où l'on conclura que les mobiles changeront de vitesses et s'écarteront ensuite.

460. Si les mobiles qui vont à la rencontre l'un de l'autre ont des vitesses égales, il suffira de faire $V' = V$ dans les équations (323), et l'on trouvera

$$v = \frac{V(M - 3M')}{M + M'}, \quad v' = \frac{V(3M - M')}{M + M'}.$$

Le corps M s'arrêtera lorsque sa vitesse v, après le choc, deviendra nulle ; ce cas arrive lorsque $M = 3M'$, c'est-à-dire lorsque la masse du mobile M est triple de celle de M'. Dans cette hypothèse de $M = 3M'$, on trouve $v' = 2V$.

461. Enfin, si le mobile M' était en repos, et qu'il fût atteint par M qui lui serait égal, en faisant dans les équations (321) $V' = 0$ et $M = M'$, on aurait pour ce cas,

$$v = 0 \quad \text{et} \quad v' = V;$$

par conséquent le mobile M perdrait sa vitesse et la donnerait à M'.

Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité dans le choc des corps.

462. Soient deux mobiles M et M' (fig. 194) qui, immédiatement avant le choc, sont parvenus aux points B et C ; nommons E et E' leurs distances au point A, et représentons par X la distance du centre de gravité de leur système au même point. Si nous regardons les masses comme proportionnelles aux forces, nous aurons, par la propriété des momens, Fig. 194.

$$(M + M')X = M.E + M'.E';$$

différentiant par rapport au temps t, il viendra

$$(M + M')\frac{dX}{dt} = M\frac{dE}{dt} + M'\frac{dE'}{dt}.$$

Les coefficiens différentiels $\frac{dE}{dt}$ et $\frac{dE'}{dt}$ qui entrent dans ces équations, représentent les vitesses des mobiles M et M' lorsqu'ils sont parvenus aux points B et C, dont les distances en A sont respectivement E et E'. Nommons V et V' ces vitesses, et désignons par W la vitesse $\frac{dX}{dt}$ du centre de gravité du système; nous aurons, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$W = \frac{MV + M'V'}{M + M'} \ldots (325).$$

Telle est la vitesse du centre de gravité du système, lorsque les mobiles sont arrivés avant le choc aux points B et C; mais lorsque immédiatement après le choc les mobiles se trouveront aux points B' et C', le centre de gravité du système changera de position. On peut demander ce que devient alors la vitesse. Pour le savoir, soient w cette vitesse, et x la distance du centre de gravité en A : les mobiles dans cette nouvelle hypothèse étant parvenus aux points B' et C', représentons par e et e' les distances AB' et AC' de ces mobiles au point A, et par U et U' leurs vitesses, nous aurons, comme précédemment,

$$(M + M')\,x = M.e + M'.e',$$

et en différentiant les variables e, e' et x par rapport à t, nous trouverons

$$(M + M')\frac{dx}{dt} = M\frac{de}{dt} + M'\frac{de'}{dt}.$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ par les vitesses w, U et U', nous trouverons

$$w = \frac{MU + M'U'}{M + M'} \ldots (326).$$

463. Il se présente ici deux hypothèses : ou les corps sont durs, ou ils sont élastiques ; dans le premier cas,

$$U = u = U';$$

donc

$$w = \frac{M + M'}{M + M'} u = u.$$

Or, nous avons vu, art. 457, que la vitesse u, qui a lieu au *maximum* de la compression, était égale à

$$\frac{MV + M'V'}{M + M'};$$

cette vitesse ayant précisément la même valeur que W, il suit de là que $w = W$; ce qui nous apprend que dans le choc des corps durs, la vitesse du centre de gravité du système, est la même après le choc qu'elle l'était avant.

464. A l'égard des corps élastiques, nous avons, art. 457, $2u - V$ et $2u - V'$ pour les vitesses après le choc des corps M et M' situés aux points B' et C'.

Substituant ces valeurs de U et de U' dans l'équat. (326), nous trouverons

$$w = \frac{M(2u - V) + M'(2u - V')}{M + M'};$$

ou, en réduisant,

$$w = 2u - \frac{(MV + M'V')}{M + M'};$$

remplaçant par u la fraction qui entre dans cette équation, il restera

$$w = u,$$

ou plutôt

$$w = \frac{MV + M'V'}{M + M'};$$

éliminant le second membre de cette équation, au moyen de l'équation (325), on obtiendra

$$w = W;$$

par conséquent, dans les corps élastiques comme dans les corps durs, la vitesse du centre de gravité est la même immédiatement avant et après le choc.

Principe de la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques; égalité de leurs vitesses relatives, et détermination de la différence des forces vives dans le choc des corps durs.

465. Le principe de la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques, revient à cette proposition : *Lorsque deux corps élastiques se rencontrent, la somme des forces vives est la même avant et après le choc.*

Soient V, V' les vitesses des corps M et M' avant le choc, et v, v' les vitesses qu'ils ont après : la somme des forces vives avant le choc est donc représentée par $MV^2 + M'V'^2$, et il s'agit de prouver qu'elle est égale à $Mv^2 + M'v'^2$, somme des forces vives après le choc.

Pour cet effet, nous avons vu, art. 457, que les vitesses v et v' des corps M et M', après le choc, étaient données par les équations

$$v = 2u - V, \quad v' = 2u - V';$$

nous avons donc

$$Mv^2 + M'v'^2 = M(2u - V)^2 + M'(2u - V')^2;$$

et, en développant les carrés indiqués dans le second membre, on trouvera

$$Mv^2 + M'v'^2 = MV^2 + M'V'^2$$
$$+ 4(Mu^2 + M'u^2 - MVu - M'V'u) \ldots (327);$$

les termes compris entre les parenthèses se détruisent mutuellement à cause de la relation (équation 318),

$$u = \frac{MV + M'V'}{M + M'};$$

car en chassant les dénominateurs et en faisant passer tous les termes dans le premier membre, et en multipliant l'équation par u, on obtient

$$Mu^2 + M'u^2 - MVu - M'V'u = 0;$$

par conséquent l'équation (327) se réduit à

$$Mv^2 + M'v'^2 = MV^2 + M'V'^2.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$Mv^2 + M'v'^2 - (MV^2 + M'V'^2) = 0;$$

ce qui nous apprend que, dans le choc des corps élastiques, la différence des forces vives qui ont lieu avant et après le choc, est égale à zéro.

466. On démontre aussi une autre propriété des corps élastiques; c'est que les vitesses relatives de ces corps sont les mêmes avant et après le choc. Pour s'en convaincre, il suffit de retrancher l'une de l'autre les équations

$$v = 2u - V, \quad v' = 2u - V',$$

et l'on trouve

$$v - v' = -(V - V'),$$

différences égales et de signes contraires ; donc après le choc, v sera autant au-dessus de v' que V' surpassait V avant le choc.

467. Dans le choc des corps durs, la différence des forces vives qui ont lieu avant et après le choc, n'est pas égale à zéro, comme lorsque les corps étaient élastiques, mais elle se trouve égale à la somme des forces vives des masses animées des vitesses perdues ou gagnées.

Ce théorème est dû à Carnot. Voici une manière très simple de le démontrer.

Les vitesses perdues par les corps M et M′ étant $V - u$ et $V' - u$, si les masses M et M′ se trouvaient animées de ces vitesses, leurs forces vives seraient respectivement,

$$M(V-u)^2 \quad \text{et} \quad M'(V'-u)^2\ (*);$$

égalant cette expression à son développement, nous aurons l'équation identique

$$\begin{aligned} & M(V-u)^2 + M'(V'-u)^2 \\ = & MV^2 + M'V'^2 + (M+M')u^2 - 2u(MV+M'V') \ldots \quad (328); \end{aligned}$$

éliminant $MV + M'V'$ au moyen de l'équation

$$u = \frac{MV + M'V'}{M+M'},$$

le second membre de l'équation (328) se réduit à

$$MV^2 + M'V'^2 - (M+M')\,u^2;$$

par conséquent l'équation (328), en changeant réciproquement de membres, peut se mettre sous la forme

$$MV^2 + M'V'^2 - (M+M')\,u^2 = M(V-u)^2 + M'(V'-u)^2;$$

ce qui vérifie le théorème que nous avons énoncé.

Principe de d'Alembert.

468. Lorsque l'on considère un système de corps liés entre eux d'une manière invariable, la liaison mutuelle de ces corps devra les empêcher d'obéir aux mouvemens qui les animeraient chacun en particulier, s'ils n'étaient point dépendans

(*) Comme le carré de $V - u$ est également celui de $u - V$, on voit que les expressions $M(V-u)^2$ et $M(V'-u)^2$ sont aussi celles des forces vives dues aux vitesses gagnées $u - V$ et $u - V'$.

les uns des autres : les vitesses de ces corps seront altérées et se troubleront mutuellement. Par exemple, si plusieurs points matériels M, M′, M″ (fig. 195) sont fixés à une droite inflexible AL, mobile autour du point A, il est certain que dans le temps θ la pesanteur qu'on suppose constante, vu le peu de longueur de AL, agissant de la même manière sur chacun de ces points, ils devraient, s'ils étaient libres, parcourir dans le temps θ des verticales égales; mais les points M, M′, M″, etc., ne pouvant se mouvoir qu'avec la droite AL, sont forcés de parcourir les arcs MK, M′K′, M″K″, etc., dans cet instant θ; par conséquent les droites IK, I′K′, I″K″, etc. exprimeront les effets de la pesanteur sur les points M, M′, M″, etc., dans le temps θ. Ces droites IK, I′K′, I″K″, etc., étant proportionnelles aux arcs MK, M′K′, M″K″, etc., et par conséquent aux rayons AM, AM′, AM″, etc., il suit de là que les vitesses effectives des différens points du système sont d'autant moindres que ces points sont plus rapprochés du centre A; tandis que si les points M, M′, M″, etc., étaient libres, ces vitesses seraient égales. Fig. 195.

469. Les vitesses effectives étant donc différentes de celles qui ont été communiquées au système, on ne pourra déterminer les divers mouvemens qui l'affectent, que lorsqu'on sera parvenu à exprimer les vitesses effectives en fonction des vitesses qui ont été transmises primitivement aux mobiles, et qui sont censées connues. C'est à quoi l'on parviendra facilement à l'aide d'un principe de dynamique que nous allons démontrer, et qui est dû à d'Alembert.

470. Soient v, v', v'', v''', etc., les vitesses qui animeraient les corps M, M′, M″, M‴, etc., s'ils agissaient indépendamment les uns des autres, et u, u', u'', u''', etc., les vitesses que prennent au lieu de v, v', v'', v''', etc., ces corps lorsqu'ils sont liés entre eux d'une manière invariable. L'une des composantes d'une vitesse étant arbitraire, nous prendrons pour

composante de v la vitesse effective u; l'autre composante sera déterminée, et nous la représenterons par U. En opérant ainsi à l'égard des autres forces, on peut, à la place de v, v', v'', v''', etc., substituer les vitesses

u et U composantes de v,
u' et U' composantes de v',
u'' et U'' composantes de v'',
u''' et U''' composantes de v''',
etc. etc. etc.,

et alors les quantités de mouvement qui entrent dans le système, considéré comme libre, et qui sont Mv, $M'v'$, $M''v''$, $M'''v'''$, etc., deviendront

$$Mu,\quad M'u',\quad M''u'',\quad M'''u''',\ \text{etc.},$$
$$MU,\quad M'U',\quad M''U'',\quad M'''U''',\ \text{etc.};$$

mais si les corps ne sont plus libres, ces quantités de mouvement doivent se réduire à

$$Mu,\quad M'u',\quad M''u'',\quad M'''u''',\ \text{etc.}$$

Il faut donc que les quantités de mouvement MU, M'U', M''U'', M'''U''', etc., se fassent équilibre.

On observera que MU, M'U', M''U'', M'''U''', etc., sont les quantités de mouvement dues aux vitesses gagnées ou perdues.

En effet, Mv étant la diagonale d'un parallélogramme dont Mu et MU seraient les côtés, on voit que si la composante MU devient nulle, Mu se réduira à Mv; d'où il suit que MU est une quantité de mouvement introduite dans le système par le changement qui s'y est opéré; il en est de même de M'U', de M''U'', etc.

On peut donc énoncer ce principe en disant, qu'*il faut que les quantités de mouvement dues aux vitesses gagnées ou perdues se fassent équilibre*; car si cela n'avait pas lieu, il y aurait de l'altération dans le système, et u, u', u'', u''', etc.,

ne pourraient être les vitesses effectives qui animent M, M', M'', M''', etc.

471. Nous avons vu que la vitesse v avait pour composantes U et u; et comme en général il y a toujours équilibre entre trois forces dont l'une serait égale et directement opposée à la résultante des deux autres, il suit de là que les trois forces Mu, MU et $-$Mv doivent être en équilibre. Or en regardant à son tour MU comme égale et d'un signe contraire à la résultante des deux autres forces, il faudra que $-$MU soit la résultante de Mu et de $-$Mv; par conséquent MU sera la résultante de $-$Mu et de $+$Mv.

Ce que nous disons de MU pouvant s'appliquer aux forces M'U', M''U'', etc., à l'égard de leurs composantes, on peut, en substituant les composantes aux forces, donner cet autre énoncé au principe de d'Alembert : *Il y aura équilibre entre les quantités de mouvement* Mv, M'v', etc. *imprimées à chacun des mobiles, et les quantités de mouvement effectives* Mu, M'u', M''u'', etc. *qui seraient prises en sens contraires de leurs directions.*

472. Pour première application de ce principe, considérons le choc de deux corps durs M et M' qui vont dans le même sens. Soient v et v' leurs vitesses avant le choc, et u leur vitesse commune après le choc. La vitesse perdue par M étant égale à celle qu'avait le mobile moins celle qui lui reste, sera exprimée par $v-u$, et la vitesse gagnée par M' étant égale à la vitesse u diminuée de v', sera représentée par $u-v'$. Les quantités de mouvement dues à ces vitesses perdues et gagnées devant se faire équilibre par le principe de d'Alembert, cet équilibre subsistera si l'on a

$$M(v-u)=M'(u-v');$$

d'où l'on tirera pour la vitesse après le choc,

$$u=\frac{Mv+M'v'}{M+M'}.$$

Si les corps allaient à la rencontre l'un de l'autre, v' serait négatif.

473. Pour seconde application, cherchons les vitesses qu'auraient deux corps M et M' (fig. 196), qui liés par un fil MEM' qui passe par une poulie de renvoi (E) glisseraient sur deux plans inclinés AB, AC adossés l'un contre l'autre.

Fig. 196.

Soit Mg une droite qui, passant par le centre de gravité de M, représente la pesanteur g; la composante de g suivant le plan incliné, est MR; c'est la seule force qui agira sur M; cette composante MR est égale à

$$g \times \cos \mathrm{RM}g = g \times \cos \mathrm{BAD} = g \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Pareillement la composante de la pesanteur qui fait glisser M' sur le plan AC, sera $g \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}$.

Nommons AD, h; AB, l; AC, l' : les forces accélératrices qui agiront sur les mobiles M et M', seront donc

$$\frac{gh}{l} \quad \text{et} \quad \frac{gh}{l'}.$$

Pour obtenir les vitesses qu'auraient ces mobiles s'ils n'étaient pas liés l'un à l'autre, observons que l'équation qui détermine l'intensité d'une force accélératrice quelconque étant en général,

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

on tire de cette équation,

$$dv = \varphi dt.$$

Dans notre cas, les forces accélératrices étant

$$\frac{gh}{l} \quad \text{et} \quad \frac{gh}{l'},$$

nous aurons pour les vitesses qui seraient imprimées aux mo-

biles, s'ils étaient libres,

$$\frac{gh}{l}dt \quad \text{et} \quad \frac{gh}{l'}dt.$$

Or les vitesses perdues par ces mobiles étant égales à celles qu'ils avaient primitivement, moins celles qui leur restent, ces vitesses perdues seront

$$\frac{gh}{l}dt - dv \text{ pour M},$$

$$\frac{gh}{l'}dt - dv' \text{ pour M}'.$$

Par le principe de d'Alembert, les quantités de mouvement qui correspondent à ces vitesses doivent se faire équilibre; et comme ces vitesses agissent en sens contraire, il suffira d'égaler entre elles ces quantités de mouvement; ce qui nous donnera

$$\text{M}\left(\frac{gh}{l}dt - dv\right) = \text{M}'\left(\frac{gh}{l'}dt - dv'\right) \ldots \quad (329).$$

Par la nature du problème, il existe une relation entre les vitesses inconnues v et v'; car le mobile M ne peut se mouvoir dans l'unité de temps d'une quantité v sans que M' ne se meuve de $-v$, puisque ces mobiles étant liés l'un à l'autre, il faut, lorsque M monte, que M' descende. Il suit de là que $v' = -v$; ce qui donne

$$dv' = -dv;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (329), on obtient

$$dv = \frac{\left(\frac{\text{M}}{l} - \frac{\text{M}'}{l'}\right)}{\text{M}' + \text{M}}hgdt,$$

et en intégrant, on trouve

$$v = \frac{\left(\frac{\text{M}h}{l} - \frac{\text{M}'h}{l'}\right)}{\text{M}' + \text{M}}gt + \text{C},$$

ou, en représentant par G le coefficient de t, cette équation peut être mise sous la forme

$$v = Gt + C \ldots (330).$$

Soit x l'espace OK parcouru dans le temps t, on aura

$$v = \frac{dx}{dt};$$

donc

$$\frac{dx}{dt} = Gt + C;$$

et en intégrant,

$$x = \tfrac{1}{2} Gt^2 + Ct + C' \ldots (331).$$

D'après les équations (330) et (331), on peut conclure que les circonstances de ce mouvement sont les mêmes que celles du mouvement des corps graves, avec cette différence, que la force accélératrice, au lieu d'être g, est G.

474. Pour troisième application, proposons-nous de déterminer le mouvement de deux corps M et M', qui, étant attachés l'un à la roue et l'autre au cylindre d'un tour, se tiennent en équilibre.

Ces deux corps étant sollicités dans l'instant dt par une force accélératrice qui n'est autre chose que la pesanteur, devraient, s'ils étaient libres, avoir chacun dans l'instant dt la quantité de mouvement gdt. Soient dv et dv' les vitesses effectives de ces mobiles; elles leur communiqueront les quantités de mouvement Mdv et $M'dv'$; par conséquent les quantités de mouvement perdues seront

$$M(gdt - dv) \text{ et } M'(gdt - dv').$$

Ces quantités de mouvement devant se faire équilibre à l'aide du tour; et l'une étant appliquée à la roue comme puissance et l'autre au cylindre comme résistance, il faudra que si l'on nomme r le rayon du cylindre, R celui de la roue, on ait

(art. 235) la proportion

$$M(gdt - dv) : M'(gdt - dv') :: r : R;$$

d'où nous tirerons

$$MR(gdt - dv) = M'r(gdt - dv') \dots (332);$$

comme il entre dans cette équation deux quantités inconnues v et v', nous allons chercher une autre équation qui exprime entre elles une relation. Pour cela nous remarquerons que les vitesses étant dans le rapport des circonférences qu'elles décrivent et par conséquent dans celui des rayons de ces circonférences, nous aurons

$$dv : dv' :: R : r,$$

ce qui nous donnera

$$dv' = \frac{rdv}{R} \dots (333);$$

substituant cette valeur dans l'équation 332, nous trouverons

$$MR(gdt - dv) = M'r\left(gdt - \frac{rdv}{R}\right);$$

multipliant tous les termes par R pour nous débarrasser du diviseur R qui est entre les parenthèses, nous aurons

$$MR^2(gdt - dv) = M'r(Rgdt - rdv);$$

effectuant les multiplications indiquées et faisant passer tous les termes affectés de dv dans le premier membre, nous trouverons

$$(-MR^2 - M'r^2)dv = (M'rR - MR^2)gdt,$$

changeant les signes et tirant la valeur de dv, nous obtiendrons

$$dv = \frac{(MR - Mr)}{MR^2 - M'r^2}Rgdt \dots (334).$$

Cette valeur étant mise dans l'équation 333, nous aurons

$$dv' = \frac{(MR - M'r)}{MR^2 - M'r^2}rgdt. \quad (335)$$

Si dans l'équation 334, nous représentons par K la constante qui est le coefficient de gdt, cette équation deviendra

$$dv = Kgdt;$$

intégrant, on obtiendra

$$v = Kgt + C.$$

Si dans cette équation, on met la valeur de v, qui est $\frac{dx}{dt}$, et qu'après avoir multiplié par dt, on intègre de nouveau, on trouvera

$$x = \tfrac{1}{2} Kgt^2 + Ct + C'.$$

Ces résultats nous apprennent que ce mouvement est dû même genre que celui qui est imprimé aux corps par la pesanteur, et n'en diffère que par l'intensité de la force accélératrice. L'équation 335 nous conduirait aux mêmes conséquences.

Du mouvement d'un corps assujéti à tourner uniformément autour d'un axe fixe.

475. Lorsqu'un corps ou un système de points matériels liés les uns aux autres d'une manière invariable, est assujéti à tourner uniformément autour d'un axe fixe qu'on suppo-
Fig. 197. sera passer par le point A (fig. 197) perpendiculairement au plan de la figure, si l'on coupe le corps par une infinité de plans omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$, etc., parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe fixe, les molécules m, m', m'', etc., dans une révolution totale, décriront autour de l'axe fixe les circonférences mon, $m'o'n'$, $m''o''n''$, etc., et parcourront dans le même instant des arcs d'un même nombre de degrés. Ces arcs étant proportionnels à leurs rayons, il en sera de même des vitesses qui animent les molécules m, m', m'', etc.; de sorte que si la distance cA de la molécule c à l'axe est prise pour unité, et que nous appelions ω la vitesse de cette molécule, les vitesses des molécules m, m', m'', etc., placées à des dis-

tances r, r', r'', etc., de l'axe fixe, seront respectivement $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, etc. Ainsi l'on aura pour les quantités de mouvement effectives de ces différentes molécules,

$$mr\omega,\quad m'r'\omega,\quad m''r''\omega,\ \text{etc.}$$

Désignons par v, v', v'', etc., les vitesses imprimées; les quantités de mouvement reçues seront mv, $m'v'$, $m''v''$, etc. Il faudra donc, d'après le second énoncé du principe de d'Alembert, qu'il y ait équilibre entre mv, $m'v'$, $m''v''$, etc., et $-mr\omega$, $-m'r'\omega$, $-m''r''\omega$, etc.

Pour obtenir l'équilibre entre ces quantités de mouvement, considérons d'abord la première, et représentons mv par une partie mf (fig. 197) prise dans la direction de cette force, et proportionnelle à son intensité; abaissons du point f la perpendiculaire fh sur le plan de la section omn, et nommons φ l'angle fmh, formé par mf avec ce plan, nous pourrons décomposer mf en deux forces, Fig. 197.

$$hf = mv \sin\varphi \text{ parallèle à l'axe fixe,}$$
$$mh = mv \cos\varphi \text{ située dans le plan } omn.$$

La première sera détruite par la résistance de cet axe, et la seconde aura son effet. En appelant de même φ', φ'', φ''', etc., les angles que les forces $m'v'$, $m''v''$, etc., font avec les plans $o'm'n'$, $o''m''n''$, etc., les quantités de mouvement imprimées au mobile seront

$$mv\cos\varphi,\quad m'v'\cos\varphi',\quad m''v''\cos\varphi'',\ \text{etc.}$$

Ces quantités de mouvement, ainsi que les quantités de mouvement effectives $mr\omega$, $m'r'\omega'$, $m''r''\omega''$, etc., se trouveront situées dans les plans omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$, etc.

Pour établir l'équilibre entre ces quantités de mouvement, nous remarquerons que puisqu'elles sont toutes situées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe, elles doivent produire sur cet axe le même effet que si tous les plans omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$, etc., n'en formaient qu'un seul; par conséquent, en

considérant ces forces comme situées dans le plan de la figure, il faudra, pour que l'équilibre puisse subsister entre elles, que la somme des momens qui tendent à faire tourner en même sens le système autour du point fixe A, soit égale à la somme des momens qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

Or les forces $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, etc., qui dérivent toutes du mouvement commun imprimé au système, le font tourner dans le même sens; et comme ces forces entraînent les points m, m', m'', etc., suivant les circonférences mno, $m'n'o'$, $m''n''o''$, etc., les rayons r, r', r'', etc., sont des perpendiculaires abaissées sur leurs directions; par conséquent la somme des momens des forces effectives est exprimée par

$$mr^2\omega + m'r'^2\omega + m''r''^2\omega + \text{etc.} = \omega(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}).$$

Représentons par Σmr^2 la quantité qui est entre les parenthèses, nous aurons $\omega\Sigma mr^2$ pour la somme des momens des forces effectives. C'est cette quantité qui doit faire équilibre à la somme ou à la différence des momens des forces

$$mv\cos\varphi,\quad m'v'\cos\varphi',\quad m''v''\cos\varphi'',\ \text{etc.}$$

Pour déterminer cette seconde quantité, soient Az l'axe fixe
Fig. 198. (fig. 198), et ml, $m'l'$, $m''l''$, etc., les forces $mv\cos\varphi$, $m'v'\cos\varphi'$, $m''v''\cos\varphi''$, etc., situées dans les plans mno, $m'n'o'$, $m''n''o''$, etc., perpendiculaires à l'axe fixe; abaissons des points A, A', A'', etc., pris dans ces plans, sur l'axe fixe, les perpendiculaires $Al = p$, $A'l' = p'$, $A''l'' = p''$, etc., sur les directions des forces $mv\cos\varphi$, $m'v'\cos\varphi'$, $m''v''\cos\varphi''$, etc.; les momens de ces forces seront

$$mvp\cos\varphi,\quad m'v'p'\cos\varphi',\quad m''v''p''\cos\varphi'',\ \text{etc.}$$

Représentons par $\Sigma mvp\cos\varphi$ la somme algébrique de ces momens, c'est-à-dire celle qui a lieu, abstraction faite des signes qui les affectent; alors, comme nous l'avons expliqué, cette somme des momens devant faire équilibre à $\omega\Sigma mr^2$, nous aurons

$$\omega\Sigma mr^2 = \Sigma mvp\cos\varphi,$$

d'où nous tirerons pour déterminer la vitesse angulaire,

$$\omega = \frac{\Sigma mvp\cos\varphi}{\Sigma mr^2} \ldots (336).$$

476. Lorsque les forces mv, $m'v'$, $m''v''$, etc., agissent dans les plans omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$, etc., les angles φ, φ', φ'', etc., sont nuls, et nous avons alors

$$\begin{array}{ll} \sin\varphi = 0, & \cos\varphi = 1, \\ \sin\varphi' = 0, & \cos\varphi' = 1, \\ \sin\varphi'' = 0, & \cos\varphi'' = 1, \\ \text{etc.} & \text{etc.}; \end{array}$$

par conséquent l'équation (336) deviendra dans ce cas,

$$\omega = \frac{\Sigma mvp}{\Sigma mr^2}.$$

477. Si toutes les vitesses imprimées aux molécules du système sont égales et parallèles, comme cela arrive dans le cas où le système recevrait une impulsion unique qui le transporterait en ligne droite dans l'espace, s'il n'était pas retenu par l'axe fixe, nous aurons, dans cette hypothèse,

$$v = v' = v'' = \text{etc.};$$

et les momens des vitesses imprimées devenant

$$mvp,\ m'vp',\ m''vp'',\ \text{etc.} = v(mp + m'p' + m''p'' + \text{etc.}),$$

la somme de ces momens pourra être représentée par $v\Sigma mp$, et l'équation (336) se changera en

$$\omega = \frac{v\Sigma mp}{\Sigma mr^2} \ldots (337).$$

Menons maintenant par l'axe fixe Az un plan AK que nous ferons tourner jusqu'à ce qu'il devienne parallèle aux forces mv,

$m'v'$, $m''v''$, etc., dont les directions sont représentées dans la
Fig. 199. figure 199 par les droites ml, $m'l'$, $m''l''$, etc. On voit que les perpendiculaires p, p', p'', etc., abaissées des centres de section A, A′, A″, etc., sur les directions de ces forces, sont égales aux perpendiculaires mq, $m'q'$, $m''q''$, etc., abaissées des points m, m', m'', etc., sur le plan AK. Nommons q, q', q'', etc., ces perpendiculaires, et Q celle qui serait abaissée du centre de gravité du système sur le plan AK, et représentons par M la somme de toutes les molécules qui le composent, nous aurons, d'après la propriété des centres de gravité,

$$MQ = mq + m'q' + m''q'' + \text{etc.};$$

et parce qu'on a

$$p = q, \quad p' = q', \quad p'' = q'', \text{ etc.},$$

l'équation précédente deviendra

$$MQ = mp + m'p' + m''p'' + \text{etc.} = \Sigma mp.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (337), nous obtiendrons

$$\omega = \frac{vMQ}{\Sigma mr^2} \ldots (338).$$

478. Il pourrait arriver qu'une partie seulement des molécules m, m', m'', etc., eussent reçu la vitesse v; alors M ne serait plus la somme des molécules du système, mais celle des molécules auxquelles les vitesses auraient été imprimées, et Q représenterait la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de cette partie du système sur le plan AK.

Il nous reste à indiquer les moyens de déterminer l'expression Σmr^2 qu'on appelle *le moment d'inertie*; c'est l'objet dont nous allons nous occuper.

Des momens d'inertie.

479. Le moment d'inertie d'un corps étant la somme des produits de tous les points matériels qui le composent par les carrés de leurs distances respectives à l'axe de rotation, nous l'avons représenté par Σmr^2. On peut, dans cette expression, remplacer la molécule m par l'élément dm de la masse, et alors le moment d'inertie sera donné par l'intégrale de l'expression $\int r^2 dm$.

480. Pour premier exemple, cherchons le moment d'inertie d'une droite CB (fig. 200) par rapport à l'axe AZ, auquel le plan CAB est perpendiculaire. Fig. 200.

Soit $AB = h$ une perpendiculaire abaissée du point A sur la direction de la droite, et $BP = x$ la distance du point B à un point quelconque de cette droite, nous aurons

$$PA^2 = (h^2 + x^2).$$

C'est cette expression qu'il faut multiplier par l'élément dm du corps. La masse, dans ce cas-ci, étant une ligne droite, n'a d'étendue que dans le seul sens de B en C; par conséquent dm sera la différence infiniment petite dx qui existe entre les abscisses consécutives $x = BP$ et $x + dx = BP'$. Ainsi, en multipliant dx par $h^2 + x^2$, on aura pour le moment d'inertie de la ligne droite CB,

$$\int (h^2 + x^2)\, dx = h^2 x + \frac{x^3}{3} + C.$$

On déterminera cette intégrale de manière que la droite soit comprise depuis le point B ou $x = 0$, jusqu'au point C ou $x = a$; et le moment d'inertie de la droite BC sera

$$h^2 a + \frac{a^3}{3}.$$

481. Déterminons encore le moment d'inertie de l'aire d'un

Fig. 201. cercle CBD (fig. 201) par rapport à un axe AZ qui passerait par son centre et qui serait perpendiculaire à sa surface.

Soit m un point quelconque dont nous représenterons la distance mA à l'axe par x; les surfaces des cercles décrits avec les rayons x et $x+dx$ auront respectivement pour expressions

$$\pi x^2 \quad \text{et} \quad \pi(x+dx)^2.$$

La différence de ces surfaces, en négligeant les infiniment petits du second ordre, sera $2\pi x dx$. Cette expression représentera une zone élémentaire dont tous les points seront distans de l'axe fixe, d'une quantité égale à x; par conséquent, en multipliant par x^2 cette zone élémentaire, nous aurons $2\pi x^3 dx$ pour la différentielle du moment d'inertie cherché. Prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, nous trouverons $\frac{1}{2}\pi a^4$ pour le moment d'inertie du cercle décrit avec le rayon a autour de l'axe des x.

Ces exemples suffiront pour faire concevoir comment la détermination des momens d'inertie peut toujours se ramener à de simples problèmes de calcul intégral (*note douzième*).

482. Lorsque l'on connaît le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe qui passe par son centre de gravité, on peut déterminer le moment d'inertie de ce corps par rapport à un autre axe parallèle au premier.

Fig. 202. Pour cet effet, soient GF et CK (fig. 202) deux axes parallèles dont le premier passe par le centre de gravité G du corps; plaçons au point G l'origine; prenons l'axe GF pour celui des z, et menons par un point quelconque m du corps, un plan mKF parallèle à celui des x, y; ce plan rencontrera les axes GF et CK en deux points F et K, et les distances du point m à ces axes seront mesurées par les droites mK et mF, que nous appellerons r et r'. Abaissons du point m la perpendiculaire mE sur le plan des x, y. Il est évident que les triangles ECG, mKF seront égaux, comme formés par des côtés parallèles. Ainsi, nous

pourrons substituer les côtés du premier de ces triangles à ceux de l'autre. Cela posé, nommons

α et $\mathcal{C}$, les coordonnées GD et DC du point C,
x et y, les coordonnées GP et PE du point E,
et a, la distance CG des deux axes;

nous aurons

$$GC^2 = GD^2 + DC^2, \quad GE^2 = GP^2 + PE^2,$$

ou

$$a^2 = \alpha^2 + \mathcal{C}^2, \qquad r'^2 = x^2 + y^2 \ldots \quad (339).$$

D'une autre part, considérant la droite CE qui passe par deux points dont les coordonnées sont respectivement x, y et α, $\mathcal{C}$; la valeur r de CE nous sera donnée par l'équation

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \mathcal{C})^2,$$

ou en développant,

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\mathcal{C}y + \alpha^2 + \mathcal{C}^2;$$

réduisant au moyen des équations (339), celle-ci deviendra

$$r^2 = r'^2 - 2\alpha x - 2\mathcal{C}y + a^2;$$

multipliant par dm et intégrant, on trouvera

$$\int r^2dm = \int r'^2dm - 2\alpha\int xdm - 2\mathcal{C}\int ydm + a^2\int dm \ldots \quad (340):$$

les expressions $\int xdm$ et $\int ydm$ qui entrent dans cette équation sont nulles : c'est ce qu'il est facile de démontrer par les considérations suivantes. Soient x et y les coordonnées d'un élément dm de la masse M : les momens de cet élément par rapport aux axes des x et des y seront respectivement ydm et xdm; par conséquent les coordonnées $x_{,}$ et $y_{,}$ du centre de gravité de M se trouveront déterminées par les équations

$$Mx_{,} = \int xdm, \quad My_{,} = \int ydm.$$

Or, dans notre cas, les coordonnées $x_{,}$ et $y_{,}$ sont nulles, puisque

le centre de gravité est à l'origine ; nous avons donc

$$\int x dm = 0, \quad \int y dm = 0.$$

Réduisant l'équation (340) au moyen de ces valeurs, et observant que $\int dm$ représentant la somme des élémens de M, cette expression n'est autre chose que M ; l'équation (340) deviendra

$$\int r^2 dm = \int r'^2 dm + Ma^2 \ldots \quad (341);$$

$\int r'^2 dm$ étant le moment d'inertie du corps M par rapport à l'axe GF qui passe par le centre de gravité, concluons que lorsque l'on connaît ce moment d'inertie, on peut toujours déterminer le moment d'inertie $\int r^2 dm$ pris par rapport à un autre axe CK dont la distance à l'axe GF serait connue.

En mettant l'équation (341) sous la forme

$$\int r^2 dm = M\left(\frac{\int r'^2 dm}{M} + a^2\right),$$

on est convenu, pour abréger, de représenter $\frac{\int r'^2 dm}{M}$ par k^2. Ainsi, en adoptant cette notation, nous dirons à l'avenir que le moment d'inertie, pris par rapport à un axe quelconque, sera donné par la formule

$$\int r^2 dm = M(k^2 + a^2).$$

Du mouvement d'un corps qui se meut d'une manière quelconque autour d'un axe fixe.

483. Supposons maintenant que différentes forces accélératrices agissant sur les points du système, le fassent tourner avec un mouvement varié autour de l'axe fixe Az (fig. 203);
Fig. 203. chaque point m décrira autour de l'axe fixe, un cercle mno qui sera perpendiculaire à cet axe, et le coupera en un point C. Soit φ la force accélératrice qui agira sur m, et δ l'angle TmP qu'elle formera au point m avec l'élément du cercle mno. Nous pouvons décomposer φ en trois forces : la première pa-

rallèle à l'axe fixe, et qui, par conséquent, sera sans effet; la seconde dirigée suivant le rayon mC, et qui sera détruite par la résistance du point C; la troisième dirigée suivant l'élément de la courbe, et qui aura pour expression $\varphi \cos \delta$. Cette dernière sera la seule composante de φ qui tendra à faire mouvoir le point m autour de l'axe Az.

Nommons ω la vitesse angulaire qui a lieu au bout du temps t, et r la distance Cm de la molécule dm à l'axe de rotation; la vitesse de dm, au bout de ce temps, sera exprimée par $r\omega$, art. 475, et dans l'instant dt, cette vitesse s'accroîtra de celle qui lui sera imprimée par la force accélératrice. Or si ce mobile était libre, la force accélératrice $\varphi \cos \delta$ lui communiquerait, dans l'instant dt, une vitesse représentée par $\varphi \cos \delta . dt$ (*); par conséquent l'élément dm, à l'expiration du temps $t + dt$, s'échapperait suivant la tangente à la courbe avec une vitesse égale à $r\omega + \varphi \cos \delta . dt$; mais comme dm est lié au système, sa vitesse effective, au bout du temps $t + dt$, n'est exprimée que par $r\omega + rd\omega$. Ainsi, dans le temps $t + dt$, la quantité de mouvement effective de dm est $(r\omega + rd\omega) dm$. Ce que nous disons de dm pouvant s'appliquer aux autres molécules, il faudra que les quantités de mouvement

$$\Sigma (r\omega + \varphi \cos \delta . dt) dm,$$

d'après le second énoncé du principe de d'Alembert, soient mises en équilibre par les quantités de mouvement

$$\Sigma (r\omega + rd\omega) dm,$$

(*) Il faut se rappeler que, quelles que soient la vitesse dv et la force accélératrice φ, on a en général, art. 297,

$$\varphi = \frac{dv}{dt}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad dv = \varphi dt:$$

Ainsi, lorsque la force accélératrice est $\varphi \cos \delta$, nous avons donc aussi $\varphi \cos \delta . dt$ pour l'accroissement infiniment petit de la vitesse.

prises en changeant leurs directions, c'est-à-dire en les regardant en général comme si elles agissaient dans un sens contraire à celui du mouvement du corps; sauf, si le cas l'exige, à changer ensuite le signe des forces qui n'agiraient pas dans le même sens que les autres.

Or, pour que ces deux sortes de quantités de mouvement, dirigées en sens contraires, se fassent équilibre autour d'un axe fixe, il faut que leurs momens, pris par rapport à cet axe, donnent des produits égaux; et comme les forces agissent suivant les élémens des cercles décrits par les points matériels, ces forces sont censées perpendiculaires aux rayons des circonférences décrites par les élémens : il suit de là qu'il suffit de multiplier les expressions précédentes par ces rayons, pour avoir les momens cherchés. Formant les équations des momens, on aura

$$\Sigma (r^2\omega + r\varphi \cos \delta . dt)\, dm = \Sigma (r^2\omega + r^2 d\omega)\, dm,$$

équation qui se réduit à

$$\Sigma r\varphi \cos \delta . dt dm = \Sigma r^2 d\omega dm \ldots (342).$$

Le temps dt et la vitesse angulaire $d\omega$ étant les mêmes dans tous les termes, on peut les mettre en dehors; et comme on a à sommer une suite de quantités infiniment petites, on pourra changer Σ en $\int$, et l'on obtiendra

$$dt \int r\varphi \cos \delta . dm = d\omega \int r^2 dm :$$

on tire de cette équation

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\int r\varphi \cos \delta . dm}{\int r^2 dm} \ldots (343).$$

Pour effectuer les intégrations indiquées, il faudra que, outre la position des différens élémens du corps, on connaisse par la nature du problème, la force accélératrice qui agit sur chaque molécule, ainsi que la direction δ de cette force : c'est ce que nous allons examiner maintenant.

Du Pendule composé.

484. Le pendule composé est un corps ou système de points matériels qui, étant soutenu par une droite inflexible AB (fig. 204), fait des oscillations autour d'un point fixe A. Dans ce mouvement, les points matériels m, m', m'', etc., décrivent des arcs de cercle mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont sur un même axe horizontal KL perpendiculaire à ces plans. Fig. 204.

Ainsi, lorsque le mobile CED ne serait soutenu que par le point A, nous pouvons toujours imaginer qu'il se meut autour d'un axe fixe KL.

485. Rapportons maintenant le mouvement du pendule composé à trois axes rectangulaires Cx, Cy, Cz (fig. 205). Fig. 205
Supposons que ces deux derniers soient dans un plan horizontal; alors l'axe des x sera vertical, et par conséquent le plan des x, y le sera aussi.

La force accélératrice, pour tous les points du système, étant la pesanteur, nous aurons

$$\varphi = \varphi' = \varphi'' = \varphi''' \text{ etc.} = g.$$

La force qui sollicite la molécule m se trouvant donc parallèle à l'axe Cx, nous pouvons représenter l'intensité de cette force par la partie mg de sa direction; alors l'angle δ sera égal à Tmg, et si l'on mène la perpendiculaire mD sur l'axe Cx, comme les angles CmD et Tmg sont l'un et l'autre complémens de TmD, ces angles seront égaux, et l'on conclura que $Cm\text{D} = \delta$; par conséquent l'équation

$$\text{D}m = Cm \cos Cm\text{D}$$

deviendra

$$\text{D}m = Cm \cos \delta,$$

ou plutôt

$$y = r \cos \delta.$$

La valeur de cos δ donnée par cette équation, et celle de φ étant mises dans l'équation (343), nous obtiendrons

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\int gydm}{\int r^2dm},$$

ou, parce que g est constant, on aura

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{g\int ydm}{\int r^2dm}\ (*).$$

Observons que ydm étant le moment de l'élément dm par rapport à l'axe des x, si nous appelons $y_{,}$ l'ordonnée du centre de gravité par rapport à cet axe, et M la masse de tout le système, nous pourrons remplacer $\int ydm$ par $My_{,}$, et notre équation deviendra

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{gMy_{,}}{\int r^2dm}\ldots\ (344).$$

Enfin, $\int r^2dm$ étant le moment d'inertie par rapport à l'axe Az, ce moment, art. 482, peut être représenté par $M(k^2+a^2)$. Substituant cette valeur dans l'équation (343), nous aurons

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{gy_{,}}{k^2+a^2}\ldots\ (345).$$

486. Nous avons vu, art. 482, que dans l'expression $M(k^2+a^2)$ du moment d'inertie, a représentait la distance CG
Fig. 202. (fig. 202) de l'axe CK à l'axe GF qui passerait par le centre de

(*) Pour mieux concevoir comment on a le droit de mettre g en dehors, si nous remontons à l'équation (342), nous verrons que φ qui représente g dans cette équation, devient un facteur commun à tous les termes renfermés dans son premier membre, et qu'alors il est permis d'écrire ainsi cette équation,

$$\varphi\Sigma r\cos\delta dtdm=\Sigma r^2d\omega dm.$$

φ peut donc aussi se mettre en dehors dans l'équation (343).

gravité. Or, dans le mouvement du corps, le centre de gravité, comme tout point du système, étant assujéti à décrire un arc de cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, si l'on représente ce plan par xCL (fig. 206), le rayon du cercle décrit sera CG $= a$, et l'ordonnée DG deviendra celle que nous avons désignée par $y_{,}$; par conséquent, d'après la propriété du cercle, nous aurons Fig. 206.

$$y_{,} = \sqrt{2ax_{,} - x_{,}^2}.$$

D'une autre part, si nous appelons s l'arc décrit par le point G, la vitesse de ce point sera $\frac{ds}{dt}$. Or, nous avons vu, art. 475, que la molécule située à une distance r de l'axe fixe, avait pour vitesse $r\omega$; d'où il suit que la vitesse du centre de gravité sera exprimée par $a\omega$. Ainsi nous aurons

$$a\omega = \frac{ds}{dt},$$

et par conséquent,

$$\omega = \frac{ds}{adt};$$

substituant dans l'équation (345) ces valeurs de ω et de $y_{,}$, nous la convertirons en

$$\frac{d^2s}{adt^2} = \frac{g\sqrt{2ax_{,} - x_{,}^2}}{k^2 + a^2}.$$

487. Pour intégrer cette équation, nous multiplierons ses deux membres par $2ads$, et nous trouverons

$$\frac{ds^2}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad v^2 = \int \frac{2ag}{k^2 + a^2} ds \sqrt{2ax_{,} - x_{,}^2} \ldots (346).$$

On ne peut déterminer l'intégrale renfermée dans le second membre de cette équation, que lorsqu'on a exprimé s en fonction de $x_{,}$; c'est à quoi l'on parvient au moyen des équations

$$ds = \sqrt{dx_{,}^2 + dy_{,}^2}, \quad y_{,} = \sqrt{2ax_{,} - x_{,}^2},$$

et en opérant comme dans l'art. 365, on trouvera

$$ds = -\frac{adx_{\prime}}{\sqrt{2ax_{\prime} - x_{\prime}^2}};$$

substituant cette valeur dans l'équation (346), nous obtiendrons

$$v^2 = -\int \frac{2a^2 g}{k^2 + a^2}\, dx_{\prime},$$

et en effectuant l'intégration indiquée, nous trouverons

$$v^2 = -\frac{2a^2 g x_{\prime}}{k^2 + a^2} + C \ldots \quad (347).$$

Pour déterminer la constante, soit EB $= b$ ce que devient $x_{\prime}$, lorsque la vitesse v est nulle; l'hypothèse de $v = 0$ et de $x_{\prime} = b$ nous donnera

$$C = \frac{2a^2 g b}{k^2 + a^2};$$

et par conséquent l'équation (347) deviendra

$$v^2, \quad \text{ou} \quad \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a^2 g}{k^2 + a^2}(b - x_{\prime});$$

d'où l'on tirera

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a^2 g}{k^2 + a^2}(b - x_{\prime})}} \ldots \quad (348).$$

Cette équation s'intègre facilement dans le cas où les oscillations sont très petites, ainsi que cela a lieu ordinairement; car, en mettant pour ds sa valeur $-\frac{adx_{\prime}}{\sqrt{2ax_{\prime}}}$ qu'on obtient en effaçant $x_{\prime}$ comme très petit devant $2a$, dans la valeur

$$ds = -\frac{adx_{\prime}}{\sqrt{(2a - x_{\prime})\, x_{\prime}}},$$

l'équation (348) deviendra

$$dt = -\frac{\frac{1}{2}dx_{,}}{\sqrt{\frac{ag}{k^2+a^2}(b-x_{,})x_{,}}},$$

et l'on pourra la mettre sous la forme

$$dt = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2+a^2}{ag}}\cdot\frac{dx_{,}}{\sqrt{(b-x_{,})x_{,}}} \ldots \quad (349).$$

488. En comparant cette équation à l'équation (232), page 228, on voit qu'elles ne diffèrent que par la partie $\frac{a}{g}$ de l'une, qui dans l'autre est remplacée par $\frac{k^2+a^2}{ag}$. Il en sera donc de même des intégrales de ces équations dans lesquelles les constantes se déterminent par la même condition de $t=0$ quand $x=b$. Par conséquent, si nous appelons l la longueur d'un pendule simple, c'est-à-dire si la constante $\frac{a}{g}$ de l'équat. (232) est ici remplacée par $\frac{l}{g}$, et que l'on détermine l par la condition

$$\frac{l}{g} = \frac{k^2+a^2}{ag},$$

le pendule simple et le pendule composé feront leurs oscillations dans le même temps. L'équation précédente nous donne alors

$$l = \frac{k^2+a^2}{a}.$$

Ainsi, par cette formule, on peut toujours trouver la longueur du pendule simple, qui ferait ses oscillations dans le même temps que le pendule composé.

489. Si, à une distance l de l'axe de suspension, on mène à cet axe AB (fig. 207) une parallèle EF, cette parallèle aura la Fig. 207.

propriété que tous les points qu'elle renfermera feront leurs oscillations comme s'ils étaient libres; car, d'après ce qui précède, on voit que ces points sont autant de pendules simples qui agissent simultanément. On les appelle *centres d'oscillation*, et la droite EF est l'*axe d'oscillation*.

490. Les axes de suspension et d'oscillation sont réciproques; c'est-à-dire que si l'on prend l'axe d'oscillation EF
Fig. 207. (fig. 207) pour axe de suspension, l'axe d'oscillation se trouvera à une distance MX égale à CD.

Pour le démontrer, nous avons vu, art. 488, que la distance CD de l'axe d'oscillation à l'axe de suspension était donnée par l'équation

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a} \ldots \quad (350).$$

Mais si l'on prend l'axe EF pour axe de suspension, le corps changera de position; car EF est une droite déterminée dans ce corps; et comme nous ignorons si le nouvel axe d'oscillation passera encore à une distance MX = CD de EF, représentons cette distance inconnue MX par l', et par a' la distance du centre de gravité à EF; nous aurons, d'après la nature du centre d'oscillation,

$$l' = \frac{a'^2 + k^2}{a'} \ldots\ldots \quad (351).$$

Cela posé, l'équation (350) nous montrant que l surpasse a, il s'ensuit que le centre de gravité doit être compris entre les axes de suspension et d'oscillation; par conséquent, il existera entre a et a' la relation

$$a + a' = l:$$

nous tirerons de cette équation

$$a' = l - a.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (351) deviendra

$$l' = \frac{(l-a)^2 + k^2}{l-a} \ldots \; (352).$$

D'une autre part, l'équation (350) nous donne

$$l - a = \frac{k^2}{a}:$$

on peut donc changer la valeur de l' en

$$l' = \frac{\left(\frac{k^4}{a^2} + k^2\right)}{\frac{k^2}{a}};$$

et en divisant tous les termes par $\frac{k^2}{a}$, on obtient

$$l' = \frac{k^2}{a} + a = l;$$

par conséquent, lorsque EF est pris pour axe de suspension, l'axe d'oscillation KH passe à une distance MX de EF, qui est précisément la même qui séparait les deux axes AB et EF.

Du Mouvement d'un corps libre dans l'espace.

491. Lorsqu'un corps ou système de corps se meut librement dans l'espace, et que le point m du système s'est transporté de m en m' (fig. 208), si les autres points du système ont changé de position, comme ils sont tous liés invariablement au point m, ils n'auront pu prendre cette nouvelle position que par un mouvement de rotation autour du point m, mouvement qui se sera effectué dans le trajet que m aura employé à parvenir de m en m'. Si ce mouvement de rotation n'avait pas eu lieu, le corps se serait transporté parallèlement à lui-même. On peut donc concevoir le mouvement d'un corps comme composé de deux autres, l'un qui transporterait toutes les molécules du système parallèlement à elles-mêmes, et l'autre qui leur imprimerait un mouvement de rotation autour Fig. 208.

du point m. Dans ce mouvement de translation, le point m n'étant pas affecté du mouvement de rotation, conservera sa vitesse primitive. C'est en vertu de cette vitesse que si le mouvement de rotation, introduit par cette hypothèse, n'eût pas eu lieu, tous les autres points du système se seraient mus en ligne droite dans l'espace.

Le point m, autour duquel on suppose que tourne le système, étant donc arbitraire, nous prendrons pour ce point le centre de gravité, parce qu'en général il jouit de plus de propriétés que les autres points du système.

492. Le problème se réduisant à déterminer ces deux sortes de mouvement, le principe de d'Alembert nous servira d'abord à trouver les équations du mouvement du centre de gravité. Pour parvenir à ce but, décomposons toutes les forces accélératrices qui agissent sur une molécule dm en trois forces X, Y, Z, parallèles aux axes coordonnés; les vitesses imprimées à dm, dans l'instant dt, seront Xdt, Ydt, Zdt; par conséquent nous aurons pour les vitesses imprimées au bout du temps $t+dt$,

$$\frac{dx}{dt}+Xdt,\quad \frac{dy}{dt}+Ydt,\quad \frac{dz}{dt}+Zdt.$$

A l'égard des vitesses effectives, au bout du même temps elles seront

$$\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt}+d\frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}+d\frac{dz}{dt};$$

par conséquent nous aurons pour les quantités de mouvement perdues par dm au bout du temps $t+dt$,

$$\left(Xdt-d\frac{dx}{dt}\right)dm,$$

$$\left(Ydt-d\frac{dy}{dt}\right)dm,$$

$$\left(Zdt-d\frac{dz}{dt}\right)dm.$$

Ce que nous disons de la particule dm pouvant s'appliquer à toutes les autres, si nous rassemblons les composantes du système qui agissent suivant l'axe des x, la somme des quantités de mouvement perdues dans le sens de l'axe des x, sera exprimée par

$$\int\left(\mathrm{X}dt - d\,\frac{dx}{dt}\right) dm \ldots \quad (353).$$

De même, les sommes des quantités de mouvement perdues parallèlement aux deux autres axes, seront respectivement

$$\int\left(\mathrm{Y}dt - d\,\frac{dy}{dt}\right) dm \ldots \quad (354),$$

$$\int\left(\mathrm{Z}dt - d\,\frac{dz}{dt}\right) dm \ldots \quad (355).$$

Or, dans le mouvement du centre de gravité en ligne droite, il suffit, pour établir l'équilibre, que les trois sommes de toutes les composantes des forces ou quantités de mouvement parallèles aux axes, soient nulles séparément; car alors l'un des points du système ne pourra se mouvoir en aucun sens, et l'équilibre s'introduira nécessairement dans le système. Ainsi, en égalant à zéro les expressions (353), (354) et (355), nous établirons la condition que le système ne peut se mouvoir en vertu des quantités de mouvement que nous avons déterminées; ce qui nous fournira les équations

$$\int\left(\mathrm{X}dt - d\,\frac{dx}{dt}\right) dm = 0,$$

$$\int\left(\mathrm{Y}dt - d\,\frac{dy}{dt}\right) dm = 0,$$

$$\int\left(\mathrm{Z}dt - d\,\frac{dz}{dt}\right) dm = 0;$$

on en déduit

$$\left.\begin{array}{l}\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm = \int \mathrm{X}dm \\ \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm = \int \mathrm{Y}dm \\ \int \frac{d^2z}{dt^2}\,dm = \int \mathrm{Z}dm\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (356).$$

Pour exprimer ces équations en fonctions des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ du centre de gravité, nous avons, par les propriétés de ce centre,

$$\mathrm{M}x_{,} = \int x dm,\quad \mathrm{M}y_{,} = \int y dm,\quad \mathrm{M}z_{,} = \int z dm;$$

différentiant deux fois de suite ces équations par rapport au temps, nous regarderons M et dm comme des constantes, puisque, lorsque le temps et l'espace varient, le corps en se mouvant est toujours censé conserver la même forme; ce qui fait que M et dm restent dans le même état. En opérant ainsi, nous obtiendrons

$$\mathrm{M}\frac{d^2x_{,}}{dt^2} = \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} = \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2z_{,}}{dt^2} = \int \frac{d^2z}{dt^2}\,dm;$$

combinant ces équations avec les équations (356), nous trouverons

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{M}\frac{d^2x_{,}}{dt^2} = \int \mathrm{X}dm \\ \mathrm{M}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} = \int \mathrm{Y}dm \\ \mathrm{M}\frac{d^2z_{,}}{dt^2} = \int \mathrm{Z}dm\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (357).$$

Ces équations déterminent le mouvement du centre de gra-

vité du corps M; car, étant intégrées, elles nous font connaître les vitesses $\frac{dx_{,}}{dt}$, $\frac{dy_{,}}{dt}$, $\frac{dz_{,}}{dt}$ du centre de gravité parallèlement à chacun des axes.

493. Les équations (357) nous donnent les moyens de démontrer une propriété remarquable du centre de gravité. Pour cet effet, soient $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, les composantes de la résultante de toutes les forces accélératrices, nous avons

$$MX_{,} = \int X dm, \quad MY_{,} = \int Y dm, \quad MZ_{,} = \int Z dm;$$

éliminant la partie intégrale entre ces équations et les équations (357), on obtiendra

$$\frac{d^2x_{,}}{dt^2} = X_{,}, \quad \frac{d^2y_{,}}{dt^2} = Y_{,}, \quad \frac{d^2z_{,}}{dt^2} = Z_{,} \ldots\ldots (358).$$

Or, si toutes les forces motrices étaient immédiatement appliquées au centre de gravité parallèlement à leurs directions, elles auraient pour composantes $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, et les équations du centre de gravité, qui se trouveraient celles d'un point matériel, se détermineraient par les équations (184), art. 330, et seraient précisément les mêmes que les équations (358); d'où il suit que le centre de gravité se meut comme si toutes les forces du système lui étaient immédiatement appliquées.

494. Pour déterminer les équations du mouvement de rotation, nous considérerons le cas le plus fréquent du problème général : c'est celui où le corps est mû par une force accélératrice qui ne passe pas par le centre de gravité ; alors en menant par le centre de gravité G (fig. 209) une perpendiculaire GL sur la direction de la force accélératrice, la force MN tendra à faire tourner LG autour du centre de gravité G, et fera décrire au point L le cercle LKH ; ce point L, en tournant, imprimera donc au mobile un mouvement de rotation autour d'un axe qui serait perpendiculaire au plan du cercle LHK, et qui passerait par le point G. Cet axe étant fixe, nous pouvons déterminer le Fig. 209.

mouvement de rotation autour du point G ; car soient v la vitesse imprimée au centre de gravité par la force accélératrice, Q la perpendiculaire GL, M la masse du corps, et $\int r^2 dm$ son moment d'inertie, la vitesse angulaire sera donnée par la formule

$$\omega = \frac{v\mathrm{MQ}}{\int r^2 dm};$$

le moment d'inertie étant pris par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité, se réduira à $\mathrm{M}k^2$, et l'équation précédente deviendra

$$\omega = \frac{v\mathrm{Q}}{k^2}:$$

telle est l'équation qui déterminera la vitesse angulaire, lorsqu'on aura calculé la vitesse v du centre de gravité au moyen des équations (357), modifiées convenablement pour ce cas.

Équations générales du mouvement d'un système quelconque de corps; principe général des aires, et application de ces théories à la position du plan principal.

495. Soient p, p', p'', etc., les vitesses qui animent différens points matériels d'un système, les quantités de mouvement gagnées ou perdues seront mp, $m'p'$, $m''p''$, etc.; par conséquent, elles devront se faire équilibre en vertu du principe de d'Alembert : ces quantités de mouvement pouvant être considérées comme des forces appliquées aux points m, m', m'', etc., seront donc assujéties à remplir les conditions générales de l'équilibre des corps. Or, ces conditions, lorsqu'il n'y a aucun point fixe dans le système, donnent lieu à six équations, comme nous l'avons vu dans la Statique.

Ainsi, en menant par chacun des points du système trois axes parallèles aux axes rectangulaires coordonnés, les composantes

de mp seront	$mp\cos\alpha$,	$mp\cos 6$,	$mp\cos\gamma$,
de $m'p'$ seront	$m'p'\cos\alpha'$,	$m'p'\cos 6'$,	$m'p'\cos\gamma'$,
de $m''p''$ seront	$m''p''\cos\alpha''$,	$m''p''\cos 6''$,	$m''p''\cos\gamma''$,
etc.	etc.	etc.	etc.

Par conséquent, nous aurons pour équations d'équilibre

$$\Sigma mp \cos \alpha = 0, \quad \Sigma mp \cos \zeta = 0, \quad \Sigma mp \cos \gamma = 0 \ldots (359),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma mp\,(x \cos \zeta - y \cos \alpha) = 0, \\ \Sigma mp\,(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0, \\ \Sigma mp\,(y \cos \gamma - z \cos \zeta) = 0.\end{array}\right\} \ldots (360).$$

496. S'il y a un point fixe dans le système, les équations (359) cessent d'exister, art. 131, et les équations (360) seront suffisantes, pourvu qu'on place l'origine à ce point.

497. S'il y a deux points fixes, on mènera une droite par ces deux points, et, la prenant pour axe des z, il suffira de la première des équations (360) pour établir l'équilibre, art. 132 et 133.

498. Nous n'avons indiqué les vitesses perdues que par les signes généraux p, p', p'', etc.; il s'agit maintenant de les exprimer en fonction des forces accélératrices qui sollicitent les différens points du système.

Pour cet effet, ne considérons d'abord que le point m, et supposons qu'on ait réduit toutes les forces qui agissent sur ce point à trois forces accélératrices X, Y, Z, respectivement parallèles aux axes coordonnés, la vitesse du mobile suivant l'axe des x, au bout du temps t, sera, art 294 et 295, $\frac{dx}{dt}$; par conséquent, cette vitesse, au bout du temps $t + dt$, deviendra $\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}$: telle sera la vitesse effective du point m. Mais si, à l'expiration du temps t, le mobile m était entraîné par la force accélératrice X, cette force imprimerait, dans l'instant dt, au point matériel m, une vitesse exprimée par Xdt, article 298, donc $\frac{dx}{dt} + \mathrm{X}dt$ exprimerait la vitesse du mobile, dans l'hypothèse où il serait libre à l'expiration du temps dt qui succéderait à t; par conséquent la vitesse perdue ou gagnée étant égale à cette dernière vitesse, moins la vitesse effective, aura pour expression

$$\frac{dx}{dt} + \mathrm{X}dt - \left(\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}\right).$$

Ainsi, en reduisant, on aura $\mathrm{X}dt - d.\frac{dx}{dt}$ pour la vitesse perdue ou gagnée par le point m, dans le sens des x, au bout du temps $t + dt$. En multipliant cette vitesse par la masse m; on voit donc que: . . . . . . $m\left(\mathrm{X}dt - d.\frac{dx}{dt}\right)$ exprimera la quantité de mouvement perdue ou gagnée

par le point m dans le sens des x; par conséquent on aura

$$mp\cos\alpha = m\left(Xdt - \frac{d^2x}{dt}\right)\ldots(361).$$

En considérant ensuite le mouvement du point m, suivant les deux autres axes, on trouvera de même

$$mp\cos\mathcal{C} = m\left(Ydt - \frac{d^2y}{dt}\right)\ldots(362),$$

$$mp\cos\gamma = m\left(Zdt - \frac{d^2z}{dt}\right)\ldots(363).$$

On formera des quantités analogues pour les autres points m', m'', m''', etc.; et en comprenant toutes ces quantités sous le signe Σ, les formules (359) et (360) deviendront, au moyen des équations (361), (362) et (363),

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma mZ\ldots(364),$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Sigma m\,(xd^2y - yd^2x)}{dt^2} &= \Sigma m\,(xY - yX)\\ \frac{\Sigma m\,(zd^2x - xd^2z)}{dt^2} &= \Sigma m\,(zX - xZ)\\ \frac{\Sigma m\,(yd^2z - zd^2y)}{dt^2} &= \Sigma m\,(yZ - zY)\end{aligned}\right\}\ldots(365).$$

Telles seront, dans toute leur généralité, les six conditions nécessaires pour le mouvement d'un système quelconque de corps.

499. Les expressions $xY - yX$, $zX - xZ$, $yZ - zY$, qui entrent dans les seconds membres des équations (365), sont nulles lorsqu'il n'entre aucune force accélératrice dans le système, ou lorsque ces forces tendent vers l'origine, ou enfin lorsque les points matériels des corps m, m', m'', etc., ne sont soumis qu'à leur action mutuelle. Dans le premier cas, les forces accélératrices n'existant point, le mouvement du système ne peut provenir que d'une impulsion unique, et les forces accélératrices étant nulles, il en est de même de leurs composantes, ce qui nous donne

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0;$$

et les seconds membres des équations (365) s'évanouissent.

500. Les seconds membres sont également nuls lorsque les forces accélératrices tendent vers le point que nous avons pris pour origine des coordonnées. En effet, nous avons vu, art 336, que lorsque le centre
Fig. 165. fixe (fig. 165) ne coïncidait pas avec l'origine A, si l'on représentait par a, b, c les coordonnées du centre d'attraction, et par p, p', p'', etc., ses

distances au point M, les composantes des forces accélératrices P, P′, P″, etc., dans le sens des axes coordonnés, étaient

$$X = P\frac{(x-a)}{p} + P'\frac{(x'-a)}{p'} + P''\frac{(x''-a)}{p''} + \text{etc.},$$
$$Y = P\frac{(y-b)}{p} + P'\frac{(y'-b)}{p'} + P''\frac{(y''-b)}{p''} + \text{etc.},$$
$$Z = P\frac{(z-c)}{p} + P'\frac{(z'-c)}{p'} + P''\frac{(z''-c)}{p''} + \text{etc.};$$

mais comme, par hypothèse, l'origine coïncide avec le centre C, on a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0;$$

et les valeurs précédentes, indiquées avec le signe conventionnel Σ, se réduisent à

$$X = \Sigma\frac{Px}{p}, \quad Y = \Sigma\frac{Py}{p}, \quad Z = \Sigma\frac{Pz}{p};$$

en mettant donc

$$\frac{Px}{p}, \quad \frac{Py}{p}, \quad \frac{Pz}{p}, \quad \frac{P'x'}{p'}, \quad \frac{P'y'}{p'}, \quad \frac{P'z'}{p'}, \quad \text{etc.},$$

à la place de X, de Y, de Z, de X′, de Y′, de Z′, etc., dans les expressions

$$xY - yX, \quad zX - xZ, \quad yZ - zY, \quad x'Y' - y'X', \quad \text{etc.} \ldots (366),$$

on verra que toutes ces quantités se détruisent. Par conséquent, lorsque les forces accélératrices sont dirigées vers un centre attractif pris pour origine, les quantités (366) devenant nulles, les seconds membres des trois équations (365) s'évanouiront.

501. Il en est de même lorsque les points matériels ne sont soumis à aucune autre force accélératrice que leur attraction mutuelle. En effet, écrivant ainsi les seconds membres des équations (365),

$$\left.\begin{array}{l} m\,(xY - yX) + m'\,(x'Y' - y'X') + \text{etc.}, \\ m\,(zX - xZ) + m'\,(z'X' - x'Z') + \text{etc.}, \\ m\,(yZ - zY) + m'\,(y'Z' - z'Y') + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (367);$$

en considérant deux à deux les points matériels du système, il est évident que la force motrice exercée par le point m sur le point m', est égale à la force motrice exercée par le point m' sur le point m. Par conséquent, en nommant X, Y, Z; X′, Y′, Z′, etc., les composantes des forces accélératrices P, P′, P″, etc., nous aurons

$$m'X' = -mX, \quad m'Y' = -mY, \quad m'Z' = -mZ;$$

éliminant X' et Y' au moyen de ces valeurs, la première des expressions (367) deviendra

$$mY(x - x') - mX(y - y') \ldots \quad (368);$$

mais la force motrice dont X, Y et Z sont les projections, étant représentée par P, et la distance des deux points m et m' par p, on aura pour les cosinus de l'angle formé par cette force avec les axes des x, des y et des z,

$$\frac{x - x'}{p}, \quad \frac{y - y'}{p}, \quad \frac{z - z'}{p}.$$

Ce qui donnera

$$X = P\frac{x - x'}{p}, \quad Y = P\frac{y - y'}{p}, \quad Z = P\frac{z - z'}{p}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (368), on obtiendra

$$mP\frac{(y - y')}{p}(x - x') - mP\frac{(x - x')}{p}(y - y'),$$

quantité évidemment nulle, par son identité.

On prouverait, par le même moyen, que toutes les autres quantités qui composent les expressions (367) se détruisent également; d'où il résulte que, dans le cas où les points m, m', m'' qui composent le système, ne sont soumis qu'à leur action mutuelle, les seconds termes des équations (365) se détruisent; et comme cela a lieu indépendamment du choix de l'origine, il en résulte que cette origine peut, dans ce cas, être placée en quelque endroit que ce soit.

502. Lorsqu'un des trois cas qu'on vient de considérer aura lieu, les seconds membres des équat. (365) s'évanouissant, elles se réduisent à

$$\frac{\Sigma m\,(xd^2y - yd^2x)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{\Sigma m\,(zd^2x - xd^2z)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{\Sigma m\,(yd^2z - zd^2y)}{dt^2} = 0;$$

les quantités qui sont entre parenthèses étant des différentielles exactes, ces équations peuvent se mettre sous cette forme

$$\frac{\Sigma md\,(xdy - ydx)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{\Sigma md\,(zdx - xdz)}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{\Sigma md\,(ydz - zdy)}{dt^2} = 0.$$

Par conséquent, en nommant a, a', a'' les constantes arbitraires, ces équations auront pour intégrales,

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\,(xdy - ydx) &= adt, \\ \Sigma m\,(zdx - xdz) &= a'dt, \\ \Sigma m\,(ydz - zdy) &= a''dt. \end{aligned}\right\} \ldots (369).$$

503. Pour savoir ce que signifient ces intégrales, menons les trois axes coordonnés Ax, Ay et Az (fig. 210); nommons $AP = x$, $PQ = y$, et Fig. 210.
représentons par $AQ = r$ la projection du rayon vecteur Am sur le plan des x, y, et par θ l'angle formé par AQ avec l'axe des x; l'arc infiniment petit QQ′ décrit avec le rayon r étant dans le rapport de r à l'unité avec l'arc θ qui est décrit par le rayon 1, aura pour valeur $rd\theta$, et le triangle APQ, rectangle en P, nous donnera

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta;$$

différentiant, on obtiendra

$$dx = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr, \quad dy = r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression $xdy - ydx$, nous trouverons

$$(xdy - ydx) = r^2\,d\theta = 2\,(\tfrac{1}{2}\,r.rd\theta) = 2\ aires\ \text{QAQ}';$$

par conséquent

$$m\,(xdy - ydx) = 2m\,(aire\ \text{QAQ}').$$

En formant des produits analogues pour toutes les masses m', m'', m''', etc., nous trouverons que la quantité $\Sigma m\,(xdy - ydx)$ se compose de la somme des produits des masses m, m', m'', etc., par le double des surfaces élémentaires qui, telles que QAQ′, sont engendrées par le mouvement des projections des rayons vecteurs Am, Am', Am'', etc., pendant le temps dt.

504. Si l'on intègre de nouveau les équations (369), on trouvera

$$\begin{aligned} \textstyle\int \Sigma m\,(xdy - ydx) &= at + b, \\ \textstyle\int \Sigma m\,(zdx - xdz) &= a't + b', \\ \textstyle\int \Sigma m\,(zdy - ydz) &= a''t + b''; \end{aligned}$$

mais, comme le temps commence avec la surface, les constantes b, b', b'', sont nulles, et ces équations se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\int \Sigma m\,(xdy - ydx) &= at, \\ \textstyle\int \Sigma m\,(zdx - xdz) &= a't, \\ \textstyle\int \Sigma m\,(zdy - ydz) &= a''t. \end{aligned}\right\} \ldots (370).$$

Ces équations nous disent que les produits des masses par les projections des aires qu'engendrent dans leurs mouvemens les rayons vecteurs, sont proportionnels au temps employé à parcourir ces projections.

Cet énoncé renferme le *principe de la conservation des aires dans sa plus grande généralité.*

505. Le système que nous venons de considérer est supposé libre; mais s'il renfermait un point fixe, les équations (365) ne pourraient subsister qu'en plaçant l'origine à ce point; il en sera de même des équations (370) qui proviennent de celles-ci. Ainsi, le principe des aires perd dans ce cas de sa généralité, et ne laisse plus l'origine à notre disposition.

506. Au reste, il est facile de s'assurer que lorsqu'il y a un point fixe pris pour origine, les seconds membres des équations (365) s'évanouissent. En effet, si l'on représente par Ar (fig. 211) la force qui, du point A, agit sur m, les composantes de Ar seront

Fig. 211.

$$Ap = X, \quad pq = Y, \quad qr = Z;$$

et le point m ayant pour coordonnées

$$AP = x, \quad PQ = y, \quad Qm = z,$$

si l'on compare les triangles rectangles APQ et AmQ aux triangles rectangles Apq et Arq, on aura les proportions

$$Ap : AP :: pq : PQ :: Aq : AQ :: qr : mQ,$$

ou

$$X : x :: Y : y .... :: Z : z;$$

d'où l'on tirera

$$xY - yX = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad yZ - zY = 0.$$

De pareilles équations devant avoir lieu pour les autres points m', m'', m''', etc., on aura

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m(xY - yX) = 0, \quad \Sigma m(zX - xZ) = 0,\\ \Sigma m(yZ - zY) = 0;\end{array}\right\}\dots (371).$$

Ce qui montre que, dans ce cas, le principe des aires a encore lieu.

507. S'il y a deux points fixes, nous avons vu, art. 132 et 133, qu'une seule des équations (70), page 71, était satisfaite; il en sera donc de même des équations (365): alors une seule des trois équations (369) aura lieu, ce qui réduira le principe des aires à n'exister que pour un des plans coordonnés.

508. Si l'on a égard aux modifications que nous avons indiquées,

art. 155, les quantités que nous avons dénommées, art. 153, A, B et C, ne représenteront plus la somme des projections, mais bien la somme des momens pris par rapport au plan principal ; ces quantités ne seront donc autre chose que celles qui ont été désignées par a, par a' et par a'', dans les équations (370). Par conséquent, la somme des projections sur le plan principal, donnée par les équations (82), page 80, sera ici

$$\sqrt{\frac{[\Sigma m(ydz-zdy)]^2}{dt^2}+\frac{[\Sigma m(zdx-xdz)]^2}{dt^2}+\frac{[\Sigma m(xdy-ydx)]^2}{dt^2}}.$$

Pour simplifier, représentons l'expression précédente par

$$\sqrt{a''^2+a'^2+a^2};$$

et remplaçons de même les fonctions A, B et C des équations (84), page 81, par a'', par a' et par a, on aura pour déterminer les cosinus du plan principal avec les plans coordonnés,

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}},\quad \cos6=\frac{a'}{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a''}{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2}}.$$

Principe général de la conservation du centre de gravité.

509. La théorie du centre de gravité nous a appris, art 167, qu'en nommant $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, les coordonnées de ce centre, dans un système de corps m, m', m'', m''', etc., on avait

$$\left.\begin{aligned}(m+m'+m''+\text{etc.})x_{,}&=mx+m'x'+m''x''+\text{etc.},\\(m+m'+m''+\text{etc.})y_{,}&=my+m'y'+m''y''+\text{etc.},\\(m+m'+m''+\text{etc.})z_{,}&=mz+m'z'+m''z''+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\ldots(372).$$

Or, si l'on représente par M la somme des masses, et que par Σ placé devant le premier terme du second membre des équations (372), on indique ce second membre, les équations (372) pourront s'écrire ainsi :

$$Mx_{,}=\Sigma mx,\quad My_{,}=\Sigma my,\quad Mz_{,}=\Sigma mz\ldots(373).$$

Cela posé, regardons les coordonnées $x_{,}, y_{,}, z_{,}; x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$, etc., comme des fonctions du temps ; et différentions deux fois de suite l'équation $Mx_{,}=\Sigma mx$, que nous mettrons sous cette forme

$$Mx_{,}=mx+m'x'+m''x''+\text{etc.},$$

les masses m, m', m'', etc., étant des constantes, nous obtiendrons

$$M\frac{d^2x_i}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} + m''\frac{d^2x''}{dt^2} + \text{etc.};$$

cette équation peut, au moyen de notre notation, être indiquée de la sorte :

$$M\frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

510. En opérant de même pour les autres coordonnées, on voit qu'en général les trois équations (373), après avoir subi nos deux différentiations par rapport à t, nous donneront

$$M\frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},\quad M\frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2},\quad M\frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si l'on met à la place des seconds membres de ces équations, leurs valeurs données par les équations (364), nous obtiendrons

$$M\frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma mX,\quad M\frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma mY,\quad M\frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma mZ;$$

nommant X_i, Y_i, Z_i, les composantes de la résultante do toutes les forces accélératrices, on aura

$$MX_i = \Sigma mX,\quad MY_i = \Sigma mY,\quad MZ_i = \Sigma mZ.$$

Au moyen de ces équations, les précédentes deviendront

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i,\quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i,\quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \ldots (374),$$

équation de même forme que les équations (184), page 193, qui supposent les forces accélératrices appliquées à un point; par conséquent, de même que dans l'art. 493, on conclura que le centre de gravité doit se mouvoir comme si toutes les forces accélératrices lui étaient immédiatement appliquées.

511. Si les forces qui composent le système ne sont soumises à d'autres forces accélératrices qu'à leur attraction mutuelle, les équations (374) se réduisent à

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0;$$

et, en les intégrant deux fois de suite, on trouvera d'abord

$$\frac{dx_i}{dt} = a,\quad \frac{dy_i}{dt} = b,\quad \frac{dz_i}{dt} = c,$$

et ensuite,

$$x_{,}= at+a', \quad y_{,}=bt+b', \quad z_{,}=ct+c';$$

et, en éliminant t, on obtiendra

$$x_{,}-a'=\frac{a}{c}(z_{,}-c'), \quad y_{,}-b'=\frac{b}{c}(z_{,}-c').$$

Ces équations étant celles d'une droite dans l'espace, on voit que le mouvement du centre de gravité sera rectiligne.

512. Si, de plus, les points matériels sont soumis à une force accélératrice constante qui agisse toujours suivant la même direction, on placera dans cette direction un des axes, celui des z, par exemple, et les équations du centre de gravité deviendront alors

$$\frac{d^2x_{,}}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y_{,}}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2z_{,}}{dt^2}=Z;$$

on pourra donc, comme dans les articles 418 et 419, prouver que la trajectoire est une parabole.

513. Enfin, il est facile de démontrer que si deux ou plusieurs corps du système se choquent pendant le mouvement du centre de gravité, la vitesse n'en sera pas altérée. En effet, l'expression générale de cette vitesse, suivant les axes coordonnés, étant d'abord la première chose à obtenir avant que de voir ce qu'elle devient dans les deux hypothèses du problème, on déterminera cette vitesse en différentiant les équations (373) par rapport au temps, ce qui nous donnera.

$$M\frac{dx_{,}}{dt}=\Sigma m\frac{dx}{dt}, \quad M\frac{dy_{,}}{dt}=\Sigma m\frac{dy}{dt}, \quad M\frac{dz_{,}}{dt}=\Sigma m\frac{dz}{dt}\ldots (375).$$

Cela posé, si l'on nomme a, a', a'', etc., et A, A', A'', etc., les vitesses des points m, m', m'', etc., avant et après le choc, et qu'on substitue successivement ces valeurs dans la première des équations (375), on aura

$$\Sigma ma = \textit{ce que devient } M\frac{dx_{,}}{dt} \textit{ avant le choc},$$

$$\Sigma mA = \textit{ce que devient } M\frac{dx_{,}}{dt} \textit{ après le choc};$$

ainsi, la somme des quantités de mouvement perdues à l'instant du choc dans le sens des x, sera $\Sigma ma - \Sigma mA$. On trouvera de même que les sommes des quantités de mouvement perdues dans le sens des autres axes, sont respectivement

$$\Sigma mb - \Sigma mB \quad \text{et} \quad \Sigma mc - \Sigma mC;$$

et comme, en vertu des équations (359), ces quantités de mouvement doivent se détruire, on a donc

$$\Sigma ma = \Sigma mA,\quad \Sigma mb = \Sigma mB,\quad \Sigma mc = \Sigma mC;$$

ce qui prouve que les valeurs de $\frac{dx_{,}}{dt}$, de $\frac{dy_{,}}{dt}$ et de $\frac{dz_{,}}{dt}$, c'est-à-dire les vitesses du centre de gravité, n'éprouvent aucune altération par l'effet du choc.

514. Cette indépendance de l'action mutuelle des corps du système, est ce qui constitue *le Principe général de la conservation du centre de gravité.*

Principe général de la conservation des forces vives.

515. L'équation des vitesses virtuelles est, d'après ce qu'on a vu article 282,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0;$$

mais comme dans les derniers paragraphes, nous avons désigné les vitesses ordinaires par les lettres p, p', p'', etc., pour ne pas confondre avec ces vitesses les projections des vitesses virtuelles, nous indiquerons ces projections de cette manière, δp, $\delta p'$, $\delta p''$, etc., et alors l'équation précédente deviendra

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \text{etc.} = 0 \ldots \quad (376).$$

Nous nous rappellerons seulement qu'en représentant les vitesses virtuelles des points m, m', m'', etc., par les chemins infiniment petits mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., que décrivent ces points, les quantités δp, $\delta p'$, $\delta p''$, etc., ne seront autre chose que les projections ml, $m'l'$, $m''l''$, etc.
Fig. 212. (fig. 212), des vitesses virtuelles mn, $m'n'$, $m''n''$, etc., décomposées suivant les directions des forces P, P', P'', etc.

516. Cherchons maintenant à exprimer les quantités δp, $\delta p'$, $\delta p''$, etc., en fonction de leurs projections sur les axes coordonnés rectangulaires. Pour cela, soient δx, δy et δz les projections de la droite mn sur ces trois axes; ces projections seront données par les arêtes ma, mb, mc,
Fig. 213. d'un parallélépipède cba (fig. 213), qui aurait mn pour diagonale. Or, la projection ml de la vitesse virtuelle, étant représentée par δp, nous avons évidemment

$$\delta p = mn \cos lmn \ldots \quad (377);$$

et comme ce cosinus dépend de ceux que forment avec les axes coor-

donnés les droites mn et ml entre lesquelles l'angle lmn est compris, nous allons chercher les expressions analytiques de ces cosinus. Pour cet effet, en considérant d'abord (fig. 213) le cosinus de l'angle que la droite mn forme avec l'axe des x, on verra qu'il est égal à Fig. 213.

$$\frac{ma}{mn} = \frac{\delta x}{mn};$$

on trouverait de même que les cosinus des angles formés par mn avec les deux autres axes sont respectivement

$$\frac{\delta y}{mn} \quad \text{et} \quad \frac{\delta z}{mn}.$$

D'un autre côté, les cosinus des angles que la droite mP fait avec les axes coordonnés étant, par hypothèse, $\cos\alpha$, $\cos 6$ et $\cos\gamma$, on aura par la formule (74), page 77,

$$\cos lmn = \frac{\delta x}{mn}\cos\alpha + \frac{\delta y}{mn}\cos 6 + \frac{\delta z}{mn}\cos\gamma;$$

au moyen de cette valeur l'équation (377) deviendra

$$\delta p = \cos\alpha.\delta x + \cos 6.\delta y + \cos\gamma.\delta z \ldots \quad (378).$$

De même, en nommant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, etc., les projections de mn, de $m'n'$, de $m''n''$, etc. (fig. 212), sur les axes coordonnés, nous aurons encore Fig. 212.

$$\delta p' = \cos\alpha'.\delta x' + \cos 6'.\delta y' + \cos\gamma'.\delta z',$$
$$\delta p'' = \cos\alpha''.\delta x'' + \cos 6''.\delta y'' + \cos\gamma''.\delta z'',$$
etc. etc. etc. etc.

Outre ces valeurs, qu'il faudra substituer dans l'équation (376), nous y remplacerons les forces P, P', P'', etc., par les quantités de mouvement perdues mp, $m'p'$, $m''p''$, etc., et en indiquant les expressions analogues par la caractéristique Σ, nous aurons

$$\Sigma\,(mp\cos\alpha.\delta x + mp\cos 6.\delta y + mp\cos\gamma.\delta z) = 0 \ldots \quad (379).$$

517. En ne considérant qu'une des quantités analogues que comprend cette équation, celle qui se rapporte à m, par exemple, et qui est

$$mp\cos\alpha.\delta x + mp\cos 6.\delta y + mp\cos\gamma.\delta z,$$

on reconnaîtra facilement que cette expression n'est autre chose que le produit de mp par l'accroissement de la vitesse p lorsque x, y et z deviennent $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$. En effet, si nous représentons la vitesse p par la droite mo (fig. 212), et par a, b, c, les coordonnées de son Fig. 212.

extrémité o, comme celles du point m sont, par hypothèse, x, y, z, la formule de la distance de deux points dans l'espace (note de l'art. 46, page 20), nous donnera

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \ldots \quad (380).$$

Pour tirer de cette équation la valeur de δp, il faudra changer x en $x+\delta x$, y en $y+\delta y$ et z en $z+\delta z$, et supposer que p devienne alors $p+\delta p$; et, en élevant au carré, on trouvera

$$(p+\delta p)^2 = (x-a+\delta x)^2 + (y-b+\delta y)^2 + (z-c+\delta z)^2.$$

On déduit de cette équation la valeur de δp, après avoir effacé les infiniment petits du second ordre; mais cette opération revient à celle de la différentiation de l'équation (380), d'où l'on tire immédiatement, après avoir changé d en δ,

$$\delta p = \frac{(x-a)}{p}\delta x + \frac{(y-b)}{p}\delta y + \frac{(z-c)}{p}\delta z.$$

Les fractions $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$, qui entrent dans cette expression étant les cosinus des angles que la vitesse p, représentée par mo, fait avec les axes coordonnés, comme cette vitesse fait partie de la droite mP, elle a donc la même inclinaison; par conséquent les cosinus sont les mêmes que ceux que nous avons désignés par $\cos\alpha$, par $\cos\beta$ et par $\cos\gamma$. Au moyen de cette dernière observation, on peut changer l'équation précédente en

$$\delta p = \cos\alpha.\delta x + \cos\beta.\delta y + \cos\gamma.\delta z,$$

valeur qui nous fait retomber sur l'équation (378).

518. Malgré cette identité de la valeur de δp, considérée comme projection de la vitesse virtuelle, et de celle de δp qui nous est donnée immédiatement par la différentiation, ne concluons point cependant qu'il n'y a aucune distinction à faire entre les accroissemens δx, δy, δz, δp et les différentielles dx, dy, dz et dp.

Nous allons voir, au contraire, que ces quantités ne sont égales qu'en certain cas. Pour cela, soit $\mathrm{F}(x, y, z, t) = 0$ l'une des équations du problème, si le système reçoit un dérangement infiniment petit, et que t ne varie pas, il suffira de modifier les variables qui se rapportent à l'espace, c'est-à-dire de supposer que x, y, z deviennent $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$; et si l'on retranche du nouvel état de la fonction son état primitif, en rejetant les infiniment petits des ordres inférieurs, on aura

$$\mathrm{F}[(x+\delta x),\ (y+\delta y),\ (z+\delta z)] - \mathrm{F}(x, y, z),$$

pour l'accroissement de la fonction, c'est-à-dire une quantité de la forme suivante :

$$M\delta x + N\delta y + P\delta z;$$

mais si l'on différentie la même fonction, et que le temps soit compris entre les variables, on parviendra à un résultat de cette forme

$$Mdx + Ndy + Pdz + Qdt,$$

et l'on voit qu'il ne peut y avoir identité entre les deux expressions, qu'autant que t est constant ; car alors le terme Qdt disparaît.

519. Le cas où le temps entre comme variable dans les équations d'un système, se rencontre, par exemple, lorsqu'un des corps est assujéti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface courbe, ou lorsqu'il est placé sur une courbe ou sur une surface en mouvement, ou lorsque la vitesse est introduite dans l'une des équations par la considération du frottement ou d'un milieu résistant ; car cette vitesse, en vertu de l'équation (151), page 167, introduit l'élément de temps dt dans le calcul.

520. Il suit de ce qui précède, lorsque t entre comme variable dans une équation, on ne peut admettre qu'on ait

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz.$$

Dans ce cas, le dérangement introduit dans le système n'est point celui qui lui succède immédiatement, et qui est dans le chemin que lui fait prendre son mouvement ; car ce nouvel état aurait lieu lorsque les coordonnées deviendraient $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. En un mot, les coordonnées $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, se rapportent à l'état effectif du système au bout du temps dt ; tandis que les coordonnées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, se rapportent à un des états très rapprochés de la position primitive que le système est susceptible de prendre au bout du temps dt, mais pourvu que la disposition mutuelle des corps ne s'y oppose pas.

Lorsque le temps est constant et que, par conséquent, le terme Qdt n'existe pas dans la différentielle, on a donc le droit de supposer

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz;$$

et alors c'est admettre que l'état réel du système, au bout de l'instant dt, est celui qu'on lui donne en vertu du petit changement qu'il subit.

521. Ainsi, lorsque les équations du problème ne renferment pas le temps, on peut supposer que les projections δx, δy, δz de la vitesse virtuelle sont les différentielles dx, dy, dz. Cette hypothèse convertit l'équation (379) en

$$\Sigma\,(mp\cos\alpha . dx + mp\cos\mathcal{C} . dy + mp\cos\gamma . dz) = 0;$$

remplaçant $mp\cos\alpha$, $mp\cos\zeta$, $mp\cos\gamma$, par leurs valeurs que donnent les équations (361), (362) et (363), et divisant par dt, l'équation précédente deviendra

$$\Sigma m\frac{(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)}{dt^2} = \Sigma m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

ou plutôt

$$\Sigma\tfrac{1}{2}m\frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \Sigma m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz);$$

et, en observant que la somme $dx^2 + dy^2 + dz^2$, divisée par le carré du temps, donne le carré de la vitesse, nous aurons, parce que $\frac{1}{2}$ est facteur commun de tous les termes du premier membre,

$$\Sigma md.v^2 = 2\Sigma m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz);$$

et comme Σmdv^2 revient à

$$md.v^2 + m'd.v'^2 + m''d.v''^2 + \text{etc.},$$

quantité qui, à cause que les masses m, m', m'', etc., sont des constantes, peut s'écrire ainsi,

$$d(mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \text{etc.}) = d\Sigma mv^2,$$

on a donc enfin

$$d\Sigma mv^2 = 2\Sigma m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)\ldots\ (381);$$

intégrant, on a

$$\Sigma mv^2 = \mathrm{C} + 2\int\Sigma m(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)\ldots\ (382).$$

C'est dans cette équation que consiste le principe général de la conservation des forces vives : elle nous apprend que la somme de ces sortes de forces ne dépend pas des courbes décrites par les mobiles m, m', m'', etc., mais bien des coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', etc., et des forces accélératrices X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', etc., appliquées aux divers points du système; et que la somme des forces vives redeviendra la même pour toutes les positions du système qui seront déterminées par les mêmes coordonnées.

522. Ce principe, comme nous l'avons fait observer, n'a lieu que lorsque le temps n'entre point en considération dans la liaison mutuelle des corps. Heureusement que ce cas est celui de la nature, qui ne nous présente que des forces qui tendent vers des points fixes, et dont les intensités, pour pouvoir dépendre de l'attraction de ces points, doivent être, comme on l'a vu art. 400, des fonctions de leurs distances respec-

tives. Nous avons déjà démontré, article 336, que, dans cette circonstance, le second membre de l'équation (381) était intégrable; ce qui précède va nous fournir encore les moyens de prouver que cette équation (381) est également intégrable lorsque différens corps soumis à une attraction mutuelle sont sollicités par des forces accélératrices proportionnelles à leurs masses et fonctions de leurs distances respectives.

523. Pour le démontrer, soient P et P' les forces attractives qui sollicitent les masses m et m' concentrées à leurs centres de gravité m et m' (fig. 214), et qui agissent dans la direction de la droite mm', représentée par p. Les coordonnées des points m et m' étant x, y, z; x', y', z', la droite $mm' = p$ fera avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus seront respectivement Fig. 214.

$$\frac{x-x'}{p}, \quad \frac{y-y'}{p}, \quad \frac{z-z'}{p};$$

par conséquent la force P, qui est située dans la direction de p, aura pour composantes suivant les axes coordonnés

$$X = P\frac{(x-x')}{p}, \quad Y = P\frac{(y-y')}{p}, \quad Z = P\frac{(z-z')}{p}.$$

Or, la force P' agissant en sens contraire de P, fera avec les axes coordonnés des angles qui seront supplémens de ceux que P formait avec les mêmes axes, et qui auront par conséquent des cosinus de signes contraires. Il suit de là que les composantes de P' parallèles aux axes coordonnés, seront

$$X' = -P'\frac{(x-x')}{p}, \quad Y' = -P'\frac{(y-y')}{p}, \quad Z' = -P'\frac{(z-z')}{p}.$$

Cela posé, l'expression $\Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz)$ étant sortie de sa forme d'abréviation, revient à

$$mXdx + mYdy + mZdz + m'X'dx' + m'Y'dy' + m'Z'dz' + \text{etc.};$$

si nous y substituons les valeurs des forces que nous venons de déterminer, nous aurons, en rassemblant les quantités qui se rapportent aux mêmes coordonnées,

$$(mPdx - m'P'dx')\frac{(x-x')}{p} + (mPdy - m'P'dy')\frac{(y-y')}{p}$$
$$+ (mPdz - m'P'dz')\frac{(z-z')}{p} + \text{etc.}$$

Mais la force accélératrice P, qui agit sur m, et qui provient de l'attrac-

tion qui réside dans la masse m', est proportionnelle à cette masse, d'après notre hypothèse; et comme il en est de même de P' à l'égard de m, on doit avoir

$$P : P' :: m' : m;$$

d'où l'on tire

$$P'm' = Pm;$$

substituant cette valeur dans l'expression précédente, et réduisant, on obtiendra

$$Pm\left[\frac{(x-x')}{p}(dx-dx')+\frac{(y-y')}{p}(dy-dy')+\frac{(z-z')}{p}(dz-dz')\right]\ldots (383).$$

Mais la quantité renfermée entre les crochets est une différentielle exacte. En effet, si l'on différentie par rapport à toutes les lettres, la formule

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=p^2,$$

on trouvera

$$(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')=pdp;$$

d'où l'on tirera

$$\frac{(x-x')}{p}(dx-dx')+\frac{(y-y')}{p}(dy-dy')+\frac{(z-z')}{p}(z-z')=dp.$$

Cette valeur réduit la formule (383) à $mPdp$, et nous donne nne différentielle complète, puisque, par hypothèse, P est fonction de p.

Cette démonstration pourrait s'appliquer à un plus grand nombre de forces accélératrices.

524. Nous ne terminerons pas cette matière sans faire remarquer que, parmi les forces dont les intensités sont des fonctions de leurs distances aux points sur lesquels elles agissent, on doit comprendre les ressorts et particulièrement les héliçoïdes. On appelle ainsi ceux que forme un fil de métal disposé en spirale, et composant une espèce de cylindre creux; ces ressorts étant interposés entre les corps, se contractent ou s'allongent d'une quantité qui est une fonction de leurs longueurs, ce qui les fait rentrer dans la classe des forces qui rendent les équations (365) intégrables. C'est par cette cause que le principe de la conservation des forces vives s'observe dans le choc des corps élastiques.

Du maximum et minimum de la somme des forces vives, et de la stabilité des corps.

525. Nous avons vu, art. 520, que l'équation générale des forces vives ne pouvait s'intégrer que lorsque le second membre ne comprenait pas

le temps parmi les variables; supposons donc qu'en pareil cas on pût déterminer l'intégrale de l'équation

$$d\Sigma mv^2 = 2\Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz)\ldots\ (384);$$

comme le second membre ne renferme de différentielle que dx, dy, dz; dx', dy', dz', etc., son intégrale sera une fonction des coordonnées x, y, z; x', y', z', etc. Soit φ cette fonction, nous aurons

$$\Sigma mv^2 = C + 2\varphi\,(x, y, z;\ x', y', z', \text{etc.})\ldots\ (385).$$

La valeur de Σmv^2 est susceptible de devenir un maximum ou un minimum lorsque la différentielle de $2\varphi\,(x, y, z;\ x', y', z', \text{etc.})$ est égale à zéro; or, cette différentielle n'étant autre chose que le second membre de l'équation (384), dont l'intégration donne l'équation (385), on voit que, dans le cas du maximum ou du minimum, on a

$$2\Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

526. Cherchons maintenant dans quelle circonstance l'égalité à zéro, prescrite par cette équation, peut avoir lieu. Pour cet effet, il faut se rappeler que lorsque le système, dans son mouvement, arrive à l'une de ses positions d'équilibre, et qu'on le dérange infiniment peu, sans lui communiquer de nouvelles vitesses, l'équation des vitesses virtuelles doit se réaliser. Or, X, Y, Z représentant les composantes des forces accélératrices parallèles aux axes coordonnés, les forces motrices deviennent dans ce cas mX, mY, mZ; et puisque δx, δy, δz, art. 515, sont Fig. 215.
les projections des vitesses virtuelles des points d'application de ces forces sur leurs directions, on a par le principe des vitesses virtuelles

$$\Sigma m\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

et comme nous avons vu qu'on avait le droit de supposer ici

$$\delta x = dx,\quad \delta y = dy,\quad \delta z = dz,$$

notre équation deviendra

$$\Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

et sera satisfaite lorsque le système passera par une position qui soit telle, qu'elle resterait en équilibre s'il n'avait d'autre vitesse que celle qui provient des forces accélératrices X, Y, Z.

527. Pour appliquer l'équation (384) au cas où l'on n'aurait d'autres forces accélératrices que celle de la pesanteur, plaçons l'axe des z dans un sens vertical, nous aurons

$$X = 0,\quad Y = 0 \quad\text{et}\quad Z = -g\ldots\ (386);$$

et, en nommant M la masse du corps et z, l'ordonnée du centre de gravité, l'équation (384) étant intégrée, nous donnera

$$\Sigma mv^2 = 2\int\Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Mais on a vu, art. 521, que cette intégrale était aussi exprimée par

$$\Sigma mv^2 = C + 2\Sigma m\int(Xdx + Ydy + Zdz)\ldots \quad (387);$$

remplaçant X, Y, Z, par les valeurs que les équations (386) donnent pour l'hypothèse actuelle, l'équation précédente se réduira à

$$\Sigma mv^2 = C - 2\Sigma m\int gdz,$$

et mettant dans le second membre, M à la place de Σm, on aura

$$\Sigma mv^2 = C - 2Mgz.$$

Le premier membre de cette équation représentant une quantité essentiellement positive, il faut qu'il en soit de même du second, et que par conséquent C soit positif. Cela posé, ce second membre étant d'autant plus graud qne la partie négative $2Mgz$ est moindre, on voit que la plus grande et que la plus petite valeur de z correspondent au minimum et au maximum de Σmv^2; d'où il fant conclure que la somme des forces vives parvient à son maximum lorsque le centre de gravité est le plns bas, et à son minimnm lorsqu'il est le plus haut.

528. Le système est dans une position d'équilibre stable, lorsqu'en l'écartant fort peu de cette position, il tend à y revenir en faisant de petites oscillations; il est dans un état d'équilibre instantané, lorsque après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, il tend à s'en éloigner de plus en plus.

Fig. 215 et 216. 529. Un cylindre elliptique A'B (fig. 215 et 216) qni, n'étant animé d'aucune vitesse, serait placé sur un plan horizontal MN, peut nous en fournir un exemple. On voit d'abord que ses positions d'équilibre doivent se rencontrer sur les droites AA', BB', CC', DD' qui renferment les sommets des axes de toutes les ellipses formées par les sections parallèles au plan ACBD; car en menant un plan vertical par la ligne de contact DD' (fig. 215), ou AA' (fig. 216), la somme des momens par rapport à ce plan doit, à cause de la symétrie de la figure, être égale à zéro; et comme le centre de gravité occupe le milieu, on voit qu'il est placé le plus bas (fig. 215), et le plus haut (fig. 216). Donc, art. 527, la somme des forces vives est dans le premier cas à son *maximum*, et dans le second à son *minimum*. Il resterait à pronver que le *maximum* répond à l'équilibre stable, et le *minimum* à l'équilibre instantané; mais cela nous mènerait trop loin, et nous renvoyons cette démonstration à

Fig. 215. Fig. 216. Fig. 215. Fig. 216.

la Mécanique de Lagrange. Nous nous bornerons à faire remarquer que lorsque le corps tend à se maintenir dans sa position comme dans la figure 215, on à se renverser sur le plan MN comme dans la figure 216, cela nous indique, dans le premier cas, que l'équilibre est stable, et dans le second, que l'équilibre est instantané. Fig. 215. Fig. 216.

530. En plaçant le cylindre de manière que les droites DD′, AA′, CC′, BB′ (fig. 215) reposent successivement sur le plan horizontal, ce cylindre passera donc par quatre positions qui seront alternativement dans un état d'équilibre stable, et dans un état d'équilibre instantané. Fig. 215.

On ne doit pas être surpris de voir un corps alterner ainsi ses positions d'équilibre stable et d'équilibre instantané; car DD′ étant par hypothèse à une de ses positions d'équilibre stable, si l'on donne une légère impulsion au corps, il tendra à revenir à la même place; mais si l'on écarte de plus en plus DD′ de sa position primitive, sa tendance à y retourner s'affaiblira, et le mouvement du corps finira par tendre vers CC′, qui est sa seconde position d'équilibre stable. Il y aura donc entre DD′ et CC′ une droite AA′, suivant laquelle le mobile n'aura ni tendance vers DD′, ni tendance vers CC′; cette droite déterminera une position d'équilibre instantané. En effet, de AA′ en DD′ le mobile tend à revenir vers DD′, et à s'écarter de AA′; il tend également à s'en écarter depuis AA′ jusqu'en CC′, puisque alors la disposition nouvelle du corps est de le ramener vers CC′; donc le mobile tend de chaque côté de AA′ à s'écarter de cette droite, et par conséquent se trouve en AA′ dans une position d'équilibre instantané.

FIN DE LA DYNAMIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

De la pression qu'exercent les fluides.

531. On appelle *fluide* un assemblage de particules matérielles qui cèdent à la moindre pression, et qui sont mobiles en tous sens.

Lorsque ces molécules matérielles ont de l'adhérence entre elles, les fluides ne sont pas dans un état de fluidité parfaite; c'est pourquoi nous ferons abstraction de cette adhérence.

532. On divise les fluides en fluides incompressibles et en fluides élastiques. Les fluides incompressibles sont ceux qui occupent toujours le même volume, lorsque la température est constante; parmi ces fluides, on range le mercure, l'eau, le vin, l'huile, etc.

Les fluides élastiques sont ceux qui peuvent changer de figure et de volume; on met au nombre de ces fluides l'eau réduite en vapeurs, l'air et les différens gaz.

Fig. 217. 533. Soit un vase ABCD (fig. 217) entièrement fermé et rempli d'un fluide que nous supposerons être sans pesanteur : si l'on fait deux ouvertures EF et HI d'égales superficies, et qu'on y applique les pistons K et L pressés par des puissances égales RK, SL dirigées perpendiculairement aux superficies HI, EF, ces puissances resteront en équilibre. Il faut donc que la pression exercée sur la surface EF se communique à la surface HI par l'intermédiaire du fluide; ce qui ne peut être, à moins que les particules des fluides n'éprouvent partout la

même pression. On peut donc, d'après cette expérience, établir la proposition suivante : La propriété qui caractérise les fluides est que, lorsqu'une puissance est appliquée à un fluide, elle y exerce une pression qui se transmet dans tous les sens.

534. Examinons maintenant comment cette propriété, qui est connue sous le nom de *principe d'égalité de pression*, peut être exprimée par une équation. Pour cela, considérons un fluide qui reposerait dans un vase AL (fig. 218) construit en forme de parallélépipède, et dont la base ABCD serait horizontale. Supposons qu'à la partie supérieure EH du fluide, on ait appliqué un piston qui presse cette base sur tous ses points; nommons P un poids qui agirait sur ce piston perpendiculairement à la surface de sa base; cette base sera pressée comme si le poids P lui était immédiatement appliqué, et chacun de ses points supportera une pression proportionnelle à son étendue; de sorte que si nous appelons A la surface ABCD, et a une partie Abcd de cette surface, et que p soit la pression que supporte a, on déterminera p par la proportion suivante : Fig. 218.

$$A : a :: P : p.$$

Prenant a pour unité de surface, nous aurons

$$p = \frac{P}{A};$$

par conséquent, si ω représente le rapport de la surface A$b'c'd'$ à la surface Abcd prise pour unité, la pression P′ que supporte la surface A$b'c'd'$ sera donnée par l'équation

$$P' = p\omega \ldots \ (388);$$

et comme toutes les parties de la masse fluide doivent être également pressées, il en résulte que si la surface ω, au lieu de se trouver sur la base du vase, était située sur ses parois latérales, on aurait encore $p\omega$ pour la pression qui agirait contre cette surface latérale.

535. Dans le cas où la surface ω est infiniment petite, elle peut être représentée par le rectangle élémentaire $dxdy$; d'où il suit que $pdxdy$ est la pression exercée par le piston contre un élément du vase, en quelque part que cet élément soit situé, et lors même que la surface de ce vase serait composée de surfaces courbes.

536. Dans ce qui précède, nous n'avons eu égard qu'à une pression P appliquée à la surface du fluide; mais si le fluide était sollicité par différentes forces accélératrices, il cesserait d'être également pressé dans tous les sens. Dans ce cas, il éprouverait deux sortes de pressions : 1° celle qui dérive de la pression P; 2° celle qui est produite par les forces accélératrices. Cette seconde pression est en général variable d'une molécule à l'autre; ce qui revient à dire que chaque molécule peut être soumise à une force accélératrice quelconque.

537. Pour donner un exemple de cette seconde espèce de pression, supposons que le fluide contenu dans le vase ABCD
Fig. 217. (fig. 217) devienne pesant; alors on devra considérer chaque molécule comme animée par une force accélératrice due à l'action de la pesanteur.

Nous verrons par la suite, lorsque nous parlerons des fluides pesans, que le principe d'égalité de pression est bien modifié par cette circonstance. Il suit de ce qui précède, que, dans le cas où l'on considère des forces accélératrices, p doit être, en général, regardé comme variable; ce qui n'empêche pas que p ne représente toujours la pression sur l'unité de surface de la molécule dm qui se rapporte aux coordonnées x, y, z, correspondantes à p.

Des équations générales de l'équilibre des fluides.

538. Considérons maintenant une molécule fluide qui, étant sollicitée par plusieurs forces accélératrices, serait mise en

équilibre dans une masse fluide, et cherchons les équations de condition qui, dans ce cas, doivent avoir lieu.

Pour cet effet, supposons que le plan des x, y soit horizontal et situé au-dessus du fluide que nous concevrons comme partagé en petits parallélépipèdes élémentaires, par des plans parallèles aux trois plans coordonnés. Soient dm la masse de l'un de ces élémens, et x, y, z ses coordonnés; le volume de cet élément sera exprimé par $dxdydz$; en le multipliant par la densité ρ, supposée constante dans cet élément, nous aurons, art. 162, $\rho dxdydz$ pour l'expression de la masse élémentaire du fluide; ce qui nous donnera cette équation

$$dm = \rho dxdydz \ldots \quad (389).$$

Cela posé, soient X, Y, Z les forces accélératrices qui agissent sur l'élément dm et qui sont supposées constantes dans toute l'étendue de cet élément. En multipliant ces forces par la masse dm, nous aurons, art. 448, Xdm, Ydm et Zdm pour les forces motrices qui doivent contre-balancer les pressions que le fluide exerce sur les six faces de l'élément. La surface supérieure $dxdy$ (fig. 219) étant prolongée jusqu'à ce qu'elle devienne égale à l'unité de surface représentée par BC, imaginons que la pression que supporte $dxdy$ soit la même dans toute l'étendue de BC, et nommons p cette pression que supporte BC. Lorsque l'ordonnée $BD = z$ se changera en $DE = z + dz$, la pression p qui varie avec z deviendra Fig. 219.

$$p + \frac{dp}{dz}\,dz,$$

et exprimera la pression de l'unité de surface sur la base EF du parallélépipède.

Par conséquent, pour avoir les pressions sur la surface supérieure BG et sur la surface inférieure EF de l'élément, il faudra multiplier ces surfaces BG et EF, égales chacune à $dxdy$, par les pressions p et $p + \frac{dp}{dz}\,dz$ qui agissent l'une sur

le plan de BG et l'autre sur le plan de EF, et l'on aura pour ces pressions que supportent BG et EF,

$$pdxdy \quad \text{et} \quad \left(p+\frac{dp}{dz}dz\right)dxdy;$$

la différence de ces pressions verticales sera donc

$$\frac{dp}{dz}dzdxdy;$$

et comme elle doit faire équilibre à la force motrice verticale, on aura

$$\frac{dp}{dz}dzdxdy = \text{Z}dm;$$

et en mettant pour dm sa valeur donnée par l'équation (389), et en réduisant, on trouvera

$$\frac{dp}{dz} = \rho\text{Z}.$$

Pareillement, en nommant q et r les pressions latérales exercées sur l'unité de surface, et qui agissent contre les faces $dxdz$ et $dydz$, on obtiendra

$$\frac{dq}{dy} = \rho\text{Y}, \quad \frac{dr}{dx} = \rho\text{X}.$$

Nous avons vu, art. 537, que la pression sur l'une des faces se composait, non-seulement de la pression qui se distribue également sur tout le fluide, mais encore de la pression exercée par l'action des forces accélératrices. Ainsi pour évaluer la pression $qdxdz$ qui agit sur la face $dxdz$, on voit que cette pression se compose, 1° d'une pression égale à la pression $pdxdy$ qui se distribue également sur tout le fluide; 2° de la pression sur la face $dxdz$, due aux forces accélératrices. Or, les forces accélératrices étant respectivement Xdm, Ydm, Zdm, l'expression due à l'action de ces forces accélératrices sera une

fonction de leurs intensités que nous représenterons par

$$F(Xdm,\ Ydm,\ Zdm),$$

et nous aurons

$$qdxdz = pdxdy + F(Xdm,\ Ydm,\ Zdm)\ldots\ (390).$$

La propriété de la fonction désignée par

$$F(Xdm,\ Ydm,\ Zdm)$$

étant que cette quantité s'évanouisse lorsque les forces accélératrices sont nulles, il faut que cette fonction puisse se ramener à ne contenir que des termes qui aient pour facteurs Xdm, Ydm, Zdm. En ordonnant ces termes, à partir de ceux qui renferment les moindres puissances de dm, nous pourrons supposer

$$F(Xdm,\ Ydm,\ Zdm) = MXdm + NYdm + PZdm + \text{etc.}$$

Substituant cette valeur dans l'équation (390), nous aurons

$$qdxdz = pdxdy + MXdm + NYdm + PZdm + \text{etc.},$$

et en mettant $\varrho dxdydz$ à la place de dm; cette équation deviendra

$$qdxdz = pdxdy + \varrho MXdxdydz + \varrho NYdxdydz + \varrho PZdxdydz + \text{etc.}$$

Divisant par $dxdy$, on a

$$q = p + \varrho MXdz + \varrho NYdz + \varrho PZdz + \text{etc}\ldots\ (391).$$

Les termes $\varrho MXdz$, $\varrho NYdz$, $\varrho PZdz$ étant infiniment petits à l'égard de p, il en résulte que l'équation (391) se réduit à

$$q = p.$$

On démontrerait de même que $r = p$; par conséquent les équations d'équilibre deviennent

$$\frac{dp}{dz} = \varrho Z,\quad \frac{dp}{dy} = \varrho Y,\quad \frac{dp}{dx} = \varrho X\ldots\ (392):$$

en multipliant ces équations, la première par dz, la seconde par dy, et la troisième par dx, et les ajoutant, on trouvera

$$dp = (\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx)\,\rho \ldots \quad (393);$$

telle est l'équation qui, par son intégration, doit donner la valeur de la pression sur l'unité de surface dans un fluide quelconque.

Application des équations générales de l'équilibre des fluides au cas des fluides incompressibles.

539. Considérons un fluide incompressible homogène qui repose dans un vase capable d'opposer à la pression une résistance indéfinie : la pression p exercée sur l'unité de surface, en un point qui a pour coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = c$, sera donnée par l'intégrale de l'équation (393), dans laquelle on substituera ces valeurs. Or, la densité ρ étant constante, la valeur de p dépendra de la possibilité de pouvoir intégrer la formule

$$\mathrm{Z}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{X}dx \ldots \quad (394);$$

c'est à quoi l'on parviendra toujours lorsque cette formule sera une différentielle exacte des variables x, y, z.

Supposons donc que cette condition soit remplie, et qu'on ait déterminé la pression p; cette pression sera détruite par la résistance du vase; mais si la pression devait être appliquée sur une partie de la surface supérieure du fluide, dans ce cas le fluide ne pouvant opposer de la résistance à la force qui le presse, il faudrait que p fût nul par lui-même; alors l'équation (393) se réduirait à

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0 \ldots \quad (395).$$

Enfin, il pourrait arriver que la pression p fût constante; et comme la différentielle d'une constante est égale à zéro, l'équation (395) aurait encore lieu dans ce cas.

540. Lorsque l'expression (394) est une différentielle exacte, et que l'équation (395) a lieu, il en résulte $dp = 0$; donc la pression, si elle existe, ne peut être que constante. Or dans ce cas, pour que le fluide puisse garder l'équilibre, il faut que la résultante des forces accélératrices qui agit de dehors en dedans, soit en même temps normale à la surface du fluide; car si cela n'était pas, on pourrait la décomposer en deux forces, l'une normale et l'autre tangente à la surface du fluide; il est évident que cette dernière ferait glisser la molécule dm.

541. Cette circonstance est aussi indiquée par l'équation (395); car soient x', y', z', les coordonnées d'un point commun à la surface et à la résultante des forces X, Y, Z; les équations de la normale au point x', y', z', d'une surface courbe étant (*Élémens de Calcul différentiel*)

$$\left.\begin{aligned} x - x' &= -\frac{dz'}{dx'}(z - z'), \\ y - y' &= -\frac{dz'}{dy'}(z - z') \end{aligned}\right\} \cdots (396),$$

on voit qu'il ne s'agit que de substituer les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$, déterminées par l'équation (395), pour que les équations (396) deviennent celles de la normale à la surface, qui se rapporte à l'équation (395). Or, en ayant égard à la notation de Fontaine, et en regardant X, Y, Z comme des fonctions des coordonnées x', y', z', l'équation (395) nous donne

$$-\frac{dz'}{dx'} = \frac{Z}{X}, \quad -\frac{dz'}{dy'} = \frac{Z}{Y}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient pour les équations de la normale au point x', y', z',

$$x - x' = \frac{Z}{X}(z - z'), \quad y - y' = \frac{Z}{Y}(z - z').$$

Ces équations sont précisément les mêmes que celles que nous avons trouvées, art. 57, pour la résultante des forces X, Y, Z.

542. L'équation (395) étant toujours supposée intégrable, nous fournit encore des conséquences remarquables; car si l'on représente par $F(x, y, z) + C$ l'intégrale de cette équation; en faisant $C = -A$, on en déduit

$$F(x, y, z) = A.$$

Si l'on donne successivement à A différentes valeurs croissantes o, a, a', a'', a''', a^{iv}, etc., on aura les équations

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ F(x, y, z) &= a, \\ F(x, y, z) &= a', \\ &\dots\dots\dots\dots \\ F(x, y, z) &= a^{(n)}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Toutes ces équations auront pour différentielle l'équation (395), et dans leur nombre se trouvera celle de la surface du fluide, c'est-à-dire celle qui est censée, par la différentiation, avoir donné l'équation (395).

Supposons donc que $F(x, y, z) = a^{(n)}$ soit cette équation; alors les autres seront celles d'autant de surfaces qui jouiront toutes de cette propriété commune, que la résultante R des forces X, Y, Z devra être non-seulement normale à la surface $F(x, y, z) = a^{(n)}$ qui est celle du fluide, mais encore l'être à toutes les autres surfaces.

En effet, si nous nommons x', y', z' les coordonnées du point où la résultante R rencontre l'une des surfaces, par exemple, celle dont l'équation est

$$F(x, y, z) = a,$$

l'équation de la normale au point x', y', z', se déduira de l'équation (395), par le procédé que nous avons suivi art. 541;

d'où nous conclurons, comme dans cet article, que la normale au point x', y', z' de la surface courbe coïncide avec la direction de R qu'on suppose passer par ce point. On a donné aux surfaces dont nous venons de parler, le nom de *surfaces de niveau*. Si l'on suppose que les constantes o, a, a', a'', a''', etc., aillent en s'augmentant par degrés insensibles, la masse du fluide sera partagée par les surfaces de niveau en une suite de tranches infiniment minces que l'on est convenu de nommer *couches de niveau*.

543. Il suit de ce qui précède, que lorsque le fluide n'est animé que par des forces accélératrices dirigées vers un centre fixe, sa surface extérieure doit être sphérique. On peut parvenir au même résultat par l'analyse. Pour cet effet, fixons l'origine au centre d'attraction, et soient x, y, z les coordonnées de l'élément dm; la distance du point x, y, z à l'origine aura pour expression $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nommons r cette distance, et λ la force d'attraction qui agit sur dm; cette force λ fera avec les axes coordonnés des angles qui auront pour cosinus $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$; par conséquent, si l'on nomme X, Y, Z les composantes de λ parallèlement aux axes, nous aurons

$$X=\lambda\frac{x}{r},\quad Y=\lambda\frac{y}{r};\quad Z=\lambda\frac{z}{r};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (396), il viendra pour l'équation de la surface du fluide,

$$\frac{\lambda}{r}(xdx+ydy+zdz)=0 \ldots \quad (397).$$

Supprimant le facteur commun $\frac{\lambda}{r}$ et intégrant, on trouvera

$$x^2+y^2+z^2=C,$$

équation d'une sphère : donc la surface du fluide devra être sphérique.

544. Si le centre de cette sphère est très éloigné de sa surface, comme cela a lieu lorsque l'on considère le centre de la Terre relativement à la surface d'une eau stagnante; dans ce cas, la courbure de la surface étant insensible, on peut la considérer comme plane dans une petite étendue.

545. L'équation (397) s'est trouvée immédiatement intégrable, parce que l'équation (395) devient, dans ce problème, un cas particulier du théorème que nous avons démontré, art. 336, sur les forces dirigées vers des centres fixes; c'est en vertu de ce théorème que l'équation (395) sera toujours intégrable dans toutes les questions que l'on peut résoudre sur des fluides qui reposeront sur des surfaces fixes.

546. Si dans l'équation (393) on remplace la quantité qui est entre les parenthèses, par $d.\mathrm{F}(x, y, z)$, on aura

$$dp = \varrho \times d.\mathrm{F}(x, y, z);$$

cette équation nous donne

$$d.\mathrm{F}(x, y, z) = \frac{dp}{\varrho} \ldots (398).$$

Or, $d.\mathrm{F}(x, y, z)$ étant, par hypothèse, une différentielle exacte, il faut qu'il en soit de même de sa valeur $\frac{dp}{\varrho}$, et que par conséquent ϱ ne contienne d'autre variable que p, condition exprimée par l'équation

$$\varrho = fp \ldots (399).$$

Si la pression p est constante, il en est donc de même de ϱ. Dans ce cas, l'équation (398) se réduit à

$$d.\mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

parce qu'une constante n'a point de différentielle. L'intégration de cette équation nous conduit à celle que nous avons trouvée, art. 542, et dont nous avons exprimé les propriétés.

547. Mais si p est variable, alors en faisant varier p par degrés insensibles, nous pourrons, durant un instant très court, regarder p comme constant. Dans cette hypothèse, l'équation (398) nous donnera pour intégrales un suite d'équations, représentées par

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z) = a,$$
$$F(x, y, z) = a',$$
$$F(x, y, z) = a'',$$
etc.

Ces équations seront celles des surfaces de niveau qui correspondent aux valeurs successives de p dans des instans égaux à dt. Pour chacune de ces surfaces, la densité ϱ sera constante; par conséquent, en considérant la masse fluide comprise entre les deux surfaces extrêmes AA' et BB' (fig. 220), cette masse de Fig. 220. fluide devra être homogène. La pression p prenant ensuite un accroissement et devenant constante, lorsque l'on passera de la surface BB' à la surface CC', le fluide compris entre ces deux surfaces devra être homogène dans toute cette étendue. Il en sera de même pour une troisième couche de fluide, comprise entre les deux surfaces CC' et DD' qui correspondent à une même valeur de p, et ainsi de suite. De sorte que dans les fluides hétérogènes, il ne peut y avoir équilibre, à moins que ces fluides ne soient composés de couches dont chacune ait la même densité dans toutes ses parties.

Application des équations générales des fluides au cas des fluides élastiques.

548. Ce qui caractérise un fluide élastique, est de pouvoir se comprimer pour reprendre ensuite la même densité et le même ressort, lorsque la force qui occasione la compression cesse d'agir.

Ainsi, lorsqu'un fluide est élastique, outre la pression qu'il exerce en vertu des forces auxquelles il est soumis, il en produit une autre qui dérive de son élasticité. On a reconnu que, pour la même température, cette pression, qu'on appelle *la force élastique du fluide*, était proportionnelle à sa densité. En supposant donc la température constante, si l'on nomme Π la pression exercée sur l'unité de densité; lorsque la pression est 2Π, la densité devient double; lorsque la pression est 3Π, la densité devient triple, et ainsi de suite. De sorte que si la densité est exprimée par ρ; la pression doit l'être par $\Pi\rho$; en appelant p cette pression, nous aurons

$$p = \Pi\rho \ldots \quad (400).$$

La densité étant mesurée par la matière renfermée dans un cube dont l'une des faces serait égale à l'unité de surface, p représentera, comme précédemment, la pression exercée sur l'unité de surface.

549. En combinant l'équation (400) avec l'équation

$$dp = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

on obtiendra

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz}{\Pi} \ldots \quad (401);$$

intégrant, il viendra

$$\log p = \int \frac{\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz}{\Pi} + \mathrm{C}.$$

550. L'équation (393) subsistant comme dans le cas des fluides incompressibles, nous en conclurons, de même que dans l'art. 546, que lorsque p est constant, ρ doit l'être aussi; par conséquent l'équation (400) nous donnera, dans cette hypothèse,

$$\Pi = constante.$$

Ainsi, en considérant p et la densité comme constans pour

une partie déterminée du fluide, nous pourrons mettre Π en dehors du signe d'intégration; et en représentant par log C' la constante, nous aurons

$$\log p = \frac{\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)}{\Pi} + \log \mathrm{C}';$$

multipliant la fraction qui entre dans cette équation par log e qui équivaut à l'unité, et changeant le coefficient en exposant, on aura

$$\log p = \log e^{\frac{\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)}{\Pi}} + \log \mathrm{C}';$$

observant que la somme des logarithmes est égale au logarithme de leur produit, nous trouverons, en simplifiant la formule d'après cette considération, et en passant aux nombres,

$$p = \mathrm{C}'e^{\frac{\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)}{\Pi}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (400), on obtiendra

$$\rho = \frac{\mathrm{C}'e^{\frac{\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)}{\Pi}}}{\Pi}.$$

La température du fluide étant supposée constante, art. 548, cette équation donnera la valeur de la densité d'une couche de niveau du fluide; car il faut observer que ce que nous avons dit, art. 546 et 547, des couches de niveau des fluides incompressibles hétérogènes, peut se rapporter aussi bien aux fluides élastiques, puisque cette théorie des couches de niveau est déduite de l'équation générale des fluides, modifiée d'après l'hypothèse de p constant, dans une certaine étendue de la masse fluide.

551. Observons qu'on ne pourrait déduire également l'é-

quation

$$(Xdx + Ydy + Zdz) = o$$

de l'hypothèse de p nul ; car lorsqu'on a $p = o$, l'équation (400) nous montre que, dans ce cas, la densité du fluide élastique doit être aussi nulle, hypothèse qui détruirait l'existence du fluide.

Ainsi, dans un fluide élastique, la pression ne peut être nulle à la surface, comme dans les fluides incompressibles.

De la pression des fluides pesans.

552. Proposons-nous d'examiner maintenant le cas où la force accélératrice qui agit sur un fluide, est la pesanteur. Pour cet effet, considérons un vase ouvert à sa partie supérieure, et qui repose sur un plan horizontal : ce vase étant rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur, la surface du fluide sera horizontale, ainsi que nous l'avons démontré. Prenons-la pour plan des x, y; et comme la pesanteur est ici la seule force accélératrice, nous aurons

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = g,$$

et l'équation (393) deviendra

$$dp = \rho g dz.$$

Regardant la densité comme constante, ainsi que la gravité, on tirera de cette équation, en l'intégrant,

$$p = \rho g z + C \ldots (402).$$

Lorsque $z = o$, la pression devant être nulle à la surface du fluide incompressible, on aura $C = o$; ce qui réduira l'équation (402) à

$$p = \rho g z \ldots (403).$$

553. Si l'on mène dans l'intérieur du fluide un plan hori-

zontal, tous les points situés sur ce plan auront leurs ordonnées dans le sens des z, égales entre elles; d'où il suit que, pour tous ces points, la pression $p = \varrho g z$ sera la même.

554. Soit h la distance comprise entre le niveau de l'eau et le plan horizontal sur lequel repose le fluide, la pression que supportera l'unité de surface de la base, sera déterminée par l'équation (403), dans laquelle on changera z en h; ce qui donnera

$$p = \varrho g h \ldots (404).$$

Nommons P la pression que supporte la base totale composée d'un nombre b d'unités de surface; il faudra que P contienne b de fois p; on aura donc.

$$P = bp \ldots (405);$$

et en mettant pour p sa valeur, (équation 404), il viendra

$$P = \varrho g h b \ldots (406).$$

Or, bh représente le volume d'un prisme qui a b pour base et h pour hauteur; en multipliant ce volume par la densité ϱ, on a la masse de ce prisme, art. 162; par conséquent, art. 163, $\varrho g h b$ en est le poids; d'où il suit que la base b supporte une pression égale au poids du volume du prisme du fluide qui repose sur cette base.

555. La pression P ne dépendant, pour le même fluide, que de la base b et de la hauteur h du fluide, il en résulte que des vases (fig. 221) remplis du même fluide, mais de bases et de hauteurs égales, supportent la même pression sur leurs bases, quoique les aires latérales de ces vases soient de formes différentes. Fig. 221.

556. A l'égard de la pression que le vase éprouve sur ses faces latérales, nommons $d\omega$ l'élément $abfe$ de cette surface (fig. 222), et z la distance au niveau de l'eau, la pression p que supporte l'unité de surface de l'élément $d\omega$, sera donnée Fig. 222.

par l'équation (403); mettant cette valeur dans la formule (405), et observant que b doit être remplacé par la surface élémentaire $abfe$, nous aurons $\varrho gzd\omega$ pour une des forces élémentaires parallèles qui composent P, donc

$$P = \int \varrho gzd\omega.$$

Cette expression contenant deux variables z et ω, il ne s'agira plus que de les réduire à une seule, pour que l'intégration puisse s'effectuer. C'est à quoi l'on parviendra lorsque la surface ω sera donnée. Cherchons, par exemple, la pression Fig. 222. exercée sur le rectangle ABDC (fig. 222) incliné à l'horizon. Il est certain que si le vase était plein, la droite horizontale CD serait au niveau de l'eau; mais, pour plus de généralité, nous supposerons que CD soit au-dessous du niveau de l'eau. Nommons b la base AB du rectangle ABDC, et l sa longueur BD; si l'on partage le rectangle en une infinité de tranches horizontales, la pression sera la même sur tous les points de l'une de ces tranches (équation 403). Représentons par v la distance Df d'une tranche quelconque af à la base supérieure CD, dv sera la hauteur ae de cette tranche; par conséquent l'élément de la surface ABDC sera

$$ab \times ae = bdv;$$

substituant cette valeur à la place de $d\omega$ dans l'expression $\int \varrho gzd\omega$, on aura

$$\int \varrho gzd\omega = \int \varrho gzbdv;$$

ce sera la pression exercée sur l'aire ABCD. On prendra l'intégrale depuis $v = 0$, jusqu'à $v = l$, lorsqu'on l'aura réduite à ne contenir qu'une seule variable. Pour y parvenir, soient φ l'angle que fait le plan ABDC avec la verticale NL, et a la distance DN de la base supérieure CD au niveau de l'eau, nous aurons

$$Kf, \quad \text{ou} \quad LN = DL + DN;$$

ou

$$z = v\cos\varphi + a;$$

par conséquent la formule à intégrer sera

$$P = \int \varrho g (v\cos\varphi + a)\, bdv;$$

effectuant l'intégration indiquée, on trouvera

$$P = \varrho g b\,(\tfrac{1}{2}v^2\cos\varphi + av) + C;$$

prenant l'intégrale entre les limites $v = 0$ et $v = l$, on aura

$$P = \varrho g b\,(\tfrac{1}{2}l^2\cos\varphi + al).$$

557. Cherchons maintenant le point où cette pression doit être appliquée : on voit d'abord que ce point d'application doit être situé sur la droite EH qui partage les côtés AB et CD en deux parties égales. Il nous reste donc à déterminer sur la droite EH, le point G où cette pression doit être appliquée.

Pour cet effet, nous regarderons les pressions exercées sur tous les points de la surface ABDC comme des forces parallèles. En prenant les momens des élémens de cette surface, par rapport à la droite horizontale CD, la pression que supporte l'élément $abfe$ étant $\varrho g z b dv$, son moment sera $\varrho g z b dv \times v \sin\varphi$; et en nommant $v_{,}$ la distance EG de CD au centre de pression, nous aurons par la théorie des momens,

$$Pv_{,}\sin\varphi = \sin\varphi \int \varrho g z b v dv, \quad \text{ou} \quad Pv_{,} = \int \varrho g z b v dv;$$

mettant dans cette intégrale la valeur de z, on trouvera

$$Pv_{,} = \varrho g b \int (\cos\varphi\, v^2 dv + av dv);$$

donc

$$Pv_{,} = \varrho g b\left(\cos\varphi \cdot \frac{v^3}{3} + \frac{av^2}{2}\right) + C,$$

et en intégrant entre les limites $v = 0$ et $v = l$, on aura

$$Pv_{,} = \varrho g b\left(\cos\varphi\,\frac{l^3}{3} + \frac{al^2}{2}\right).$$

Mettant pour P sa valeur et divisant par l facteur commun, on

trouvera

$$v_{,} = \frac{\cos\varphi \cdot \frac{l^2}{3} + \frac{al}{2}}{\cos\varphi \cdot \frac{l}{2} + a}$$

Ayant trouvé par un procédé analogue, les pressions exercées sur les autres faces latérales, et sur celle de la base, et leurs centres d'application, on prendra la résultante de toutes ces forces pour avoir la pression totale.

558. Considérons maintenant un corps plongé dans un fluide pesant homogène : la pression que ce fluide exerce contre une portion quelconque de la surface de ce corps, se déterminera de la même manière que celle qui agit contre les parois du vase; mais lorsqu'on voudra trouver la pression totale, on fera usage des propositions suivantes que nous allons démontrer :

1°. *Les diverses pressions qui agissent sur le corps ont une résultante unique qui agit verticalement, et tend à le presser dans un sens opposé à celui de la pesanteur;*

2°. *Les pressions horizontales se détruisent;*

3°. *L'intensité de la résultante de toutes les pressions est égale au poids du volume du fluide déplacé;*

4°. *Cette résultante de toutes les pressions passe par le centre de gravité du volume du fluide déplacé; et comme elle agit verticalement, sa direction est déterminée.*

Fig. 223. Pour démontrer ces propositions, considérons (fig. 223) un fluide pesant renfermé dans le vase ADE, où il est en équilibre; et imaginons que tout-à-coup une partie KL de ce fluide passe de l'état fluide à l'état solide, l'équilibre ne sera pas troublé. Or ce solide est entraîné de haut en bas par une force verticale égale à son poids, et appliquée à son centre de gravité; cette force ne peut être détruite que par la résultante de toutes les pressions normales que le fluide exerce contre le

solide; d'où il suit que la résultante de toutes les pressions normales est verticale et doit être une force unique, puisqu'elle fait équilibre à une force unique; et comme la résultante de toutes les pressions est verticale, il faut que les forces horizontales (*note treizième*) se détruisent mutuellement.

Il ne peut donc y avoir équilibre entre un corps et le fluide dans lequel il est plongé, que lorsque les centres de gravité du corps et du fluide déplacé sont sur la même verticale, condition remplie lorsque le corps est entièrement plongé dans le fluide, parce que les volumes du corps et du fluide déplacé sont les mêmes : mais si le corps n'est plongé qu'en partie, son centre de gravité n'est plus le même que celui du fluide déplacé; alors il faut que ces centres de gravité soient sur la même verticale.

559. Nommons v le volume du fluide déplacé, et v' celui du corps qui y est plongé; ϱ la densité du fluide, et ϱ' celle du corps : les expressions $\varrho g v$ et $\varrho' g v'$ exprimeront les poids du volume du fluide déplacé et du corps; par conséquent, dans notre hypothèse où le corps est entièrement plongé dans le fluide, nous aurons

$$\varrho g v = \varrho' g v';$$

et comme $v = v'$, il faudra que les densités ϱ et ϱ' soient égales; mais si le poids du corps est plus léger que celui du fluide déplacé, nous aurons

$$\varrho' g v' < \varrho g v:$$

le corps remontera, et la force qui le fera mouvoir sera égale à $\varrho g v - \varrho' g v'$.

Si au contraire on a

$$\varrho' g v' > \varrho g v,$$

le corps descendra, et la force qui le pressera équivaudra à $\varrho' g v' - \varrho g v$.

Par conséquent le corps descendra comme s'il était animé

d'un poids $\rho' g v' - \rho g v$ égal à la différence du poids du corps sur celui du fluide.

Des corps flottans; théorie du métacentre; des oscillations des corps flottans, et de leur stabilité.

560. Les propositions que nous avons démontrées art. 559 et 560 établissent ces deux principes, qui servent de fondement à toute la théorie des corps flottans :

1°. *Lorsqu'un corps est plongé dans l'eau, il ne peut rester en équilibre à moins que son centre de gravité et celui du fluide déplacé ne soient sur une même verticale ;*

2°. *La masse d'eau qui remplit la partie submergée est de même poids que celui du corps entier.*

C'est par ce second principe qu'on évalue le poids d'un navire. Pour cela, on mesure la capacité de la partie submergée, et l'on compte autant de kilogrammes qu'elle contient de décimètres cubes, ou autant de fois 70 livres qu'elle contient de pieds cubes.

561. Quoique le mot *carène* ne s'applique guère qu'à un vaisseau, nous lui donnerons un sens beaucoup plus général en désignant ainsi la partie du corps flottant qui est plongée dans un fluide, et qu'on nomme quelquefois *le creux*. La carène est terminée par le plan de flottaison, qui la sépare du reste du corps : le plan de flottaison n'est donc autre chose que la section du corps flottant par le plan du niveau de l'eau.

562. Nous avons vu, art. 560, qu'en nommant v le volume du fluide déplacé, ρ sa densité, et g la pesanteur, le poids P d'un corps ACBD
Fig. 224. (fig. 224) qui surnage sur un fluide, était contrebalancé par une force verticale égale à $\rho g v$, et que, pour que ces deux forces se missent en équilibre, il fallait qu'une partie ABD de ce corps restât dans l'eau; c'est donc cette partie ABD qui est la carène.

563. Si le corps flottant est homogène, et qu'il en soit de même du fluide, le centre de gravité de la carène coïncidera avec celui de la partie déplacée du fluide; car en supposant que la densité du fluide soit la $n^{ième}$ partie de celle du corps, chaque molécule déplacée vaudra la $n^{ième}$ partie de celle qui la remplacera, et la résultante des deux molécules égales m et m' du fluide n'en passera pas moins par le milieu de la ligne qui les sépare, lorsqu'au lieu d'être m et m', elles deviendront $m \times n$ et $m' \times n$; et comme en général toutes les distances respectives des points m, m', m'', etc., seront les mêmes dans les deux hypothèses, il s'ensuit

que le point d'application de la résultante de toutes ces molécules, c'est-à-dire que les centres de gravité coïncideront.

564. A l'égard du corps entier, s'il est homogène, son centre de gravité G (fig. 224) sera situé au-dessus du centre de gravité O de la carène. En effet, soit g le centre de gravité de la partie qui sort de l'eau, le centre de gravité G du corps entier se trouvera sur la ligne gO qui unit les centres de gravité g et O; donc il sera situé dans l'intervalle de g à O, et par conséquent se trouvera au-dessus de O. Fig. 224.

565. Mais si le corps flottant est hétérogène, il peut bien arriver que le centre de gravité G du corps flottant soit au-dessous de celui de la carène. Pour le concevoir, il faut remarquer que si l'équilibre se maintient, on a, art. 561,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Poids d'une masse d'eau de}\\ \text{même vol. que la carène}\end{array}\right\} = \text{Poids du corps flottant.}$$

Or cette équation ne nécessite pas que le poids du corps soit uniformément distribué dans toute l'étendue du volume; donc, en supposant le corps hétérogène, il est possible que la majeure partie du poids soit concentrée dans une partie très peu étendue, et qui fasse que le centre de gravité G de tout le corps flottant se trouve au-dessous du centre de gravité O de la carène.

566. Il résulte de ce qui précède, que le centre de gravité du corps peut se trouver tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de celui de la carène.

567. Lorsque la carène est plus légère que le volume d'eau qu'elle déplace, elle ne se maintient donc en équilibre que parce que le poids du reste du corps fait compensation à la différence du poids du volume de l'eau déplacée, et de celui de la carène. Si l'on augmente ensuite la charge que supporte le corps flottant, il s'enfoncera encore plus, art. 560; jusqu'à ce que l'eau déplacée ait rétabli l'équilibre, et que la masse d'eau que remplace la carène soit égale au poids du corps flottant.

Nommons M ce poids; nous le considérerons comme une force appliquée au centre de gravité O de la carène, et agissant dans une direction verticale. Supposons maintenant que le corps flottant plongé en partie dans un fluide soit un peu incliné, et que la ligne de niveau AB (fig. 225), qui indique le profil de la coupe à fleur d'eau du corps flottant, se trouve remplacée par ab; la force M appliquée en O, perpendiculairement à ab, représentera la poussée du fluide, et agira de bas en haut, comme nous l'avons vu art. 559. Par conséquent, cette force étant multipliée par la perpendiculaire GL menée du centre de gravité Fig. 225.

sur sa direction, donnera $M \times GL$ pour son moment, par rapport au point G; remplaçant GL par GO sin LOG, ce moment deviendra

$$M.GO \sin LOG.$$

Or l'angle LOG formé par deux perpendiculaires aux droites AB et ab, étant le même que l'angle BCb formé par ces droites, si nous désignons cet angle par θ, et si nous appelons A la distance OG du centre de gravité de la carène à celui du corps flottant, notre moment deviendra

$$M.A \sin \theta.$$

Ce moment calculé en regardant la poussée de l'eau comme une force positive, agirait en sens contraire si le point G tombait au-dessous de O.

Si l'on augmente le facteur $\sin \theta$, il est évident que le moment augmentera aussi; et qu'il en sera de même de l'angle θ d'inclinaison; mais plus cet angle d'inclinaison est grand, plus le corps flottant tendra à être submergé. Si, au contraire, l'angle θ reste le même, c'est du facteur M.A que dépend l'intensité du moment $M.A \sin \theta$. Euler donne le nom de stabilité à ce facteur, parce qu'il peut servir à évaluer le degré de stabilité d'un corps flottant, comme nous allons le voir.

568. En effet, soit F une force dont le moment pris par rapport au point G serait capable de détruire l'effet de $M.A \sin \theta$, le moment de cette force se trouvera en abaissant la perpendiculaire GK sur sa direction KR; et en nommant k cette perpendiculaire, le produit kF sera donc le moment cherché. Or, ce moment étant égal à celui que nous avons précédemment déterminé, puisque par hypothèse toutes les forces sont réduites à M et à F, nous aurons

$$kF = M.A \sin \theta;$$

d'où l'on tirera

$$\sin \theta = \frac{kF}{M.A}.$$

569. Pour appliquer cette formule à un navire, supposons que l'on veuille que l'angle d'inclinaison ne surpasse pas 10° (divis. sexag.), on prendra kF pour unité, et remplaçant $\sin \theta$ par le sinus de 10° qui est d'environ $\frac{1736}{10000}$, fraction à laquelle nous substituerons $\frac{1}{6}$, qui en diffère fort peu, et nous aurons

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{M.A}.$$

Si l'on prend un nombre de degrés moindre que 10, le sinus diminuant, il en sera de même de la fraction qui en est la valeur: par exemple, si

l'angle est de 9°, la fraction sera

$$\frac{1564}{10000} = \frac{1}{6 + \textit{une fraction}}.$$

Il suit de là que, pour un angle d'inclinaison au-dessous de 10° (on ne compte pas les minutes), la stabilité M.A doit surpasser six fois le plus grand effort que supporte le navire.

Examinons maintenant de quelle manière le poids de l'eau se met en équilibre avec la poussée du fluide.

570. Pour cela, supposons qu'un corps dont une partie surnage sur un fluide sorte de son état d'équilibre par une légère impulsion; la carène (fig. 226), qui était ADB, deviendra *aDb*, et le centre de gravité G n'aura pas changé; car c'est en ce point que se réunissent l'action de la poussée de l'eau et du poids du corps : ces forces, si elles ne se détruisent pas, ne pourront qu'établir un mouvement circulaire autour du point G. A l'égard du centre de gravité O, on voit qu'il se rapprochera de la partie B*b* du corps; car, puisqu'il était en O lorsque la carène était ADB, il faudra, lorsque cette carène sera diminuée de *a*CA et augmentée de *b*CB, que son centre de gravité *o* se trouve plus près de la partie qui a été ajoutée à la carène. Menons par le point *o* et le point G les perpendiculaires *oi* et G*k* sur le nouveau plan de niveau *ab*. Comme ces deux forces appartiennent à un même système, elles doivent, dans le cas de l'équilibre, être égales et directement opposées. Cette dernière condition est remplie lorsque les points *k* et *i* coïncident; mais lorsque ces points ne se confondent pas, il pourra arriver deux cas, selon que le point *k* tombera entre C et *i*, ou que *i* tombera entre C et *k*. Dans le premier cas, le poids du corps qui agit de G vers *k*, et la poussée de l'eau qui agit de *o* en *i*, étant considérés comme deux forces égales appliquées aux points *k* et *i* de la droite C*b*, on voit que la première tendra à rapprocher C*b* de CB, et la seconde à écarter ces lignes l'une de l'autre, mais que cette dernière force l'emportera, parce qu'elle agit sur un plus grand bras de levier. Donc, dans ce cas, le corps tendra à s'élever du côté de B, et par conséquent à reprendre sa position primitive, et sera dans un état d'équilibre stable. Fig. 226.

Au contraire, si le point *i* tombe entre C et *k*, C*k* étant plus grand que C*i*, le poids du corps l'emportera sur la poussée de l'eau, et alors la partie qui était plongée dans l'eau tendra à s'y enfoncer davantage, ce qui constituera un état d'équilibre instantané.

571. Si l'on compare maintenant la poussée du fluide à ce qu'elle était dans sa position primitive, on verra que les lignes OG et *oi* sont perpendiculaires à AB et à *ab*; elles forment donc entre elles un angle égal à *b*CB. Par conséquent ces lignes se rencontrent nécessairement en un

certain point m, qu'on appelle *le métacentre*. Il suit de l'art. 570 que,
Fig. 227. lorsque G est au-dessous de m (fig. 227), l'extrémité k de la perpendiculaire Gk abaissée sur ab, tombant entre C et i, l'équilibre dans ce cas est stable; mais il est instantané quand G se trouve au-dessus de m; car alors la distance de C en k surpasse celle de C en i.

572. Cherchons maintenant à déterminer le métacentre. Nous avons vu que ce point se trouvait sur la verticale menée par les centres de gravité du corps et de la carène. La question se réduit donc à trouver la distance du métacentre à l'un des points G et O qui sont censés connus de position.

Pour cela, remarquons d'abord que, lorsque le plan dont AB indique
Fig. 228. le profil (fig. 228) prend la position ab très peu inclinée, la partie ACa de la carène sort de l'eau, tandis que la partie bCB se trouve submergée. Les carènes qui appartiennent à ces deux positions ont donc une partie commune dans le corps intermédiaire aCBD; par conséquent on a (*)

ancienne carène = *corps intermédiaire* aCBD + ACa,
nouvelle carène = *corps intermédiaire* aCBD + bCB.

Or, si nous nommons γ, g et g' les centres de gravité du corps intermédiaire, du corps enlevé aCA et du corps bCB ajouté à la carène, et que nous appliquions à ces centres de gravité des forces proportionnelles aux poids de ces solides, le centre de gravité O de l'ancienne carène divisera la ligne $g\gamma$ en raison inverse des forces appliquées à ces points; il en sera de même de la ligne $g'\gamma$ à l'égard du point o; de sorte que nous aurons

vol. du corps intermédiaire aCBD : *vol.* aCA :: Og : Oγ ... (407),
vol. du corps intermédiaire aCBD : *vol.* bCB :: og' : $o\gamma$ ... (408);

mais les seconds termes de ces proportions sont identiques; car si le corps flottant est en équilibre dans sa nouvelle position, il faudra, puis-

---

Fig. 229. (*) Il est à observer que lorsque CB vient en Cb (fig. 229), la ligne BR, menée des extrémités B et R de l'ancienne carène, vient en br; il reste donc dans le secteur BCb, l'espace vide Bbq; mais nous n'en tenons pas compte, parce que cet espace est très petit. En effet, les triangles qBs, Cbq étant semblables à cause des angles opposés au sommet, et des angles égaux CBR, Cbr, donnent qsb = C = θ; donc le côté qb opposé à l'angle qsb est très petit; et comme bB l'est aussi, il en est de même du 3ᵉ côté bq du triangle bqB, et par suite de sa hauteur et de son aire. Si θ est un infiniment petit, cette aire en devient donc un du 2ᵉ ordre, qui, à l'égard du secteur CBb, est nul, et l'est également lorsqu'on substitue à la corde br l'arc de courbe br, puisque l'espace vide est encore
Fig. 228. plus petit. Une remarque analogue s'applique au secteur ACa (fig. 228).

qu'il n'a pas changé de poids, qu'il déplace la même quantité d'eau : donc les deux carènes seront égales en volume; et, à cause de la partie commune $aCBD$, il en sera de même des solides aCA et bCB, qui, eussent-ils des formes différentes, seraient encore égaux. Par conséquent on déduira des proportions (407) et (408), Fig. 228.

$$Og : og' :: O\gamma : o\gamma ;$$

ce qui nous montre que les droites $g\gamma$ et $g'\gamma$ sont coupées proportionnellement par la droite Oo, qui, par conséquent, est parallèle à gg'.

Or le nouveau plan de flottaison ayant une inclinaison très petite, on peut regarder l'épaisseur des volumes bCB, ACa comme nulle, et par conséquent admettre que la droite gg' se trouve dans le premier plan de flottaison; et puisque Oo est parallèle à gg', il s'ensuit que cette droite sera aussi parallèle au plan de flottaison.

573. Pour déterminer Oo, on tirera de la proportion (407)

$$vol.\ intermédiaire\ aCBD + vol.\ aCA : vol.\ aCA :: Og + O\gamma : O\gamma,$$

ou

$$vol.\ de\ l'ancienne\ carène : vol.\ aCA :: g\gamma : O\gamma ;$$

mais les triangles semblables $gg'\gamma$ et $Oo\gamma$, nous donnent

$$g\gamma : O\gamma :: gg' : Oo.$$

En comparant cette proportion à la précédente, on en déduit

$$la\ carène : vol.\ aCA :: gg' : Oo \ldots (409);$$

donc

$$Oo = \frac{vol.\ aCA \times gg'}{vol.\ carène} \ldots (410).$$

574. Connaissant Oo, il est facile d'obtenir Om (fig. 230); car les droites Om et om étant perpendiculaires à CA et à Ca, si, parce que les angles C et m sont très petits, nous regardons les triangles AaC et Oom comme isoscèles, ces triangles seront semblables, et donneront Fig. 230.

$$arc\ Aa : Oo :: Ca : mO ;$$

d'où l'on tirera

$$mO = \frac{Oo \times Ca}{arc\ Aa} \ldots (411).$$

575. Déterminons maintenant les valeurs analytiques de Oo et de mO. Pour cet effet, remarquons que la surface supérieure AB (fig. 231) de la carène primitive qui était au niveau de l'eau, a été remplacée par la surface supérieure de la nouvelle carène, de telle manière, que l'extrémité A s'élève hors de l'eau, tandis que l'autre extrémité B y est plongée : ces deux plans de niveau, coupés par un plan vertical, donnent la section ACa de la Fig. 231.

Fig. 228. figure 228; et si nous continuons à mener des plans parallèles verticaux, Fig. 231. nous partagerons le solide compris entre les plans KAL et KaL (fig. 231) en une infinité de tranches parallèles au plan ACa.

Or il est évident que lorsque le plan KAL, qui était à la surface de l'eau, s'est élevé hors de cette surface, et a tourné autour de KL comme autour d'une charnière, chaque droite, telle que CA, a décrit un petit Fig. 231. arc de cercle; de sorte que les sections des plans ALB, aLb (fig. 231), par nos plans parallèles, seront les secteurs ACa, A′C′a', A″C″a'', etc. Fig. 232. (fig. 232). Or, si nous prenons la commune section KL pour axe des x, et que nous plaçions l'axe des y perpendiculairement à celui des x dans le plan KAL, les ordonnées y seront les perpendiculaires AC, AC′, AC″, etc. Cela posé, l'angle infiniment petit formé par les plans KAL, KaL étant partout le même, nommons ω l'arc qui le mesure et qui est décrit avec le rayon 1, nous trouverons l'arc de secteur par la proportion

$$1 : \omega :: \text{AC} \text{ ou } y : arc\ \text{A}a;$$

d'où l'on tirera

$$arc\ \text{A}a = \omega y \ldots (412).$$

En multipliant cet arc par la moitié du rayon y, nous aurons $\frac{1}{2}\omega y^2$ pour l'aire de ce secteur. Ce secteur à son tour étant multiplié par la petite épaisseur CC′ $= dx$, comprise entre deux secteurs consécutifs, nous aurons le petit solide

$$\text{A}aa'\text{A}' = \tfrac{1}{2}\omega y^2 dx$$

Fig. 226. pour l'élément du solide que nous cherchons, et nous trouverons (fig. 226)

$$vol.\ \text{AC}a = \tfrac{1}{2}\omega \int y^2 dx \ldots (413).$$

Tel sera le second terme de la proportion (409) : à l'égard du troisième, Fig. 228. l'élément $\frac{1}{2}\omega y^2 dx$ va nous le faire trouver. En effet, la droite Cg (fig. 228) Fig. 231. étant la distance de l'axe KL (fig. 231), au centre de gravité de l'onglet KaLA, nous déterminerons cette distance en prenant la somme des momens des secteurs élémantaires par rapport à cet axe.

Fig. 232. Or, en considérant le secteur ACa (fig. 232), le centre de gravité g de Fig. 233. ce secteur se trouve sur le rayon CR $=$ CA (fig. 233), à une distance de C qui, art. 184, a pour expression

$$\frac{2}{3}\text{CR} \times \frac{corde\ \text{A}a}{arc\ \text{A}a};$$

mais l'angle C étant très petit, nous remplacerons l'arc par la corde; et Fig. 231. comme CR est égal à CA, c'est-à-dire à y (fig. 231), l'expression précédente nous donne $\frac{2}{3}y$ pour la distance du centre de gravité à l'axe KL. Multipliant le solide élémentaire $\frac{1}{2}\omega y^2 dx$ par cette distance, le moment de ce solide, par rapport à l'axe KL, sera donc $\frac{1}{3}\omega y^3 dx$; il suit de ce qui

précède que l'on aura

$$\int \tfrac{1}{2}\,\omega y^2 dx = \textit{somme des solides élémentaires},$$
$$\int \tfrac{1}{3}\,\omega y^3 dx = \textit{somme des momens des solides élémentaires};$$

donc, par la propriété des momens, la distance Cg du centre de gravité du petit corps CAa (fig. 228), ou KALa (fig. 231), aura pour expression Fig. 228. Fig. 231.

$$Cg = \frac{\int \frac{1}{3}\omega y^3 dx}{\int \frac{1}{2}\omega y^2 dx};$$

et comme ω est une constante, on peut la faire passer en dehors du signe d'intégration, ainsi que les fractions numériques; et alors l'équation précédente se réduit à

$$Cg = \frac{2\int y^3 dx}{3\int y^2 dx}.$$

576. Quand, par le moyen de l'intégration, on aura déterminé Cg, la même formule fera connaître la valeur de Cg' (fig. 228); mais, si le corps flottant a une figure symétrique, comme cela a lieu dans les navires, on prendra Fig. 228.

$$Cg = Cg'.$$

Ainsi, en doublant la valeur de Cg, nous aurons

$$gg' = \frac{4\int y^3 dx}{3\int y^2 dx} \ldots (414).$$

A l'égard du volume de la carène, dont l'expression entre aussi dans l'équation (410), on le déterminera par les formules connues du Calcul différentiel lorsque le corps sera régulier. Nommant V ce volume, nous en substituerons la valeur dans l'équation (410), ainsi que celles du volume ACa (fig. 228) et de gg', données par les équations (413) et (414), et nous trouverons Fig. 228.

$$Oo = \frac{2\omega\int y^3 dx}{3V}.$$

Enfin, en substituant dans l'équation (411) cette valeur ainsi que celle de l'arc Aa, exprimée par l'équation (412), et mettant y à la place de CA, nous trouverons

$$mO = \frac{2\int y^3 dx}{3V}.$$

Telle est la formule qui donne la distance du métacentre au centre de gravité O de la carène.

577. Lorsque le corps flottant est homogène, et que les sections faites par des plans parallèles verticaux sont des figures semblables, on peut déterminer le métacentre par une formule très simple, et qui dispense

même de recourir à l'intégration. Pour la démontrer, soit a^2 la superficie de la section AEB (fig. 234) qu'on est censé avoir mesurée par des moyens géométriques, et b la demi-largeur CA de cette section; les autres sections A'E'B', A''E''B'', etc., auront pour demi-largeurs C'A', C''A'', etc., qui sont les ordonnées y de la courbe KAL. Ces sections étant par hypothèse des figures semblables, seront proportionnelles aux carrés des lignes homologues, et par conséquent aux carrés des ordonnées; on aura donc

Fig. 234.

$$\textit{section } AEB : \textit{section } A'E'B' :: AC^2 : A'C'^2,$$

ou

$$a^2 : \textit{section } A'E'B' :: b^2 : y^2;$$

on tire de cette proportion

$$\textit{section } A'E'B' = \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

L'épaisseur CC' ou la distance d'une section à la section consécutive, étant infiniment mince, si nous la représentons par dx, nous aurons

$$\frac{a^2y^2}{b^2}\,dx$$

pour l'élément de notre tranche.

578. Soit g le centre de gravité de la coupe AEB qui, parce qu'elle est symétrique, se trouve sur la verticale CE. Ce centre de gravité étant déterminé, nous sommes censés en connaître la distance au niveau du fluide. Nommons n cette distance, nous aurons encore, en vertu de la similitude des figures,

$$b : y :: n : \left\{ \begin{array}{l} \textit{la distance } n' \textit{ du centre de gravité de} \\ \textit{la coupe } A'E'B' \textit{ au niveau de l'eau;} \end{array} \right.$$

donc

$$n' = \frac{ny}{b}.$$

Multipliant cette distance par la coupe élémentaire, on aura pour le moment de cette coupe, par rapport au niveau de l'eau,

$$\frac{ny}{b} \times \frac{a^2y^2}{b^2}\,dx;$$

d'où il suit que $\frac{na^2}{b^3}\int y^3dx$ sera la somme de tous les momens prise par rapport au niveau. Cette somme devant être égale au moment du centre de gravité de tout le corps par rapport au même plan du niveau de l'eau, si nous nommons G cette distance HG, et V le volume du corps, nous

aurons

$$V.G = \frac{na^2}{b^3} \int y^3 dx;$$

d'où nous tirerons

$$G = \frac{na^2}{b^3 V} \int y^3 dx.$$

Mais nous avons vu, art. 576, que la distance mO du métacentre au centre de gravité O de la carène était donnée par la formule

$$mO = \frac{2\int y^3 dx}{3V};$$

si l'on compare entre elles ces expressions, on aura

$$G : mO :: \frac{na^2}{b^3} \int y^3 dx : \frac{2}{3} \int y^3 dx,$$

ou

$$G : mO :: 3na^2 : 2b^3;$$

d'où l'on tirera

$$mO = \frac{2b^3 G}{3na^2} \ldots (415).$$

579. Pour donner une application de cette formule, proposons-nous de trouver le métacentre d'un parallélépipède rectangle ML. Soit donc AF (fig. 235) la section de ce corps par le niveau de l'eau, qui sera parallèle au plan NL, le corps s'enfoncera dans l'eau d'une certaine quantité AN dépendante de la charge qu'il supporte, de sorte que ce ne sera que l'expérience, art 560, qui pourra déterminer la hauteur AN de la carène; mais dès que l'on connaîtra cette hauteur, on trouvera facilement la coupe que nous avons représentée par a^2; car toutes les coupes parallèles à BN étant égales à ce parallélogramme, nous aurons Fig. 235.

$$a^2 = AB \times CE.$$

D'un autre côté, la demi-largeur de la coupe étant égale à $\frac{1}{2}$ AB, on a

$$b = \frac{1}{2} AB = AC;$$

et comme tous les centres de gravité des coupes de la carène sont distans du niveau AF de l'eau d'une quantité égale à $\frac{1}{2}$CE, il en sera de même du centre de gravité G de la carène; de sorte que nous aurons

$$n = G = \frac{1}{2} CE.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (415), nous obtiendrons pour la distance du métacentre m au centre de gravité O de la carène,

$$mO = \frac{2AC^3}{3AB \times CE}.$$

ou, en remplaçant AB par 2AC et en réduisant,

$$mO = \frac{AC^2}{3CE}.$$

Par exemple, si la demi-largeur du parallélépipède est de 9 mètres et la hauteur de la carène de 4 mètres, on trouvera que la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité de la carène est de $6^m \frac{3}{4}$, et si l'on en retranche la hauteur de la carène, il restera $2^m \frac{3}{4}$ pour la distance du métacentre au niveau de l'eau; ce qui montre qu'il faudrait que le centre de gravité du parallélépipède s'élevât au-dessus de $2^m \frac{3}{4}$.

580. Pour seconde application de la formule (415), considérons une Fig. 236. carène dont la coupe verticale ABE (fig. 236) est un triangle AEB, rectangle en C; ce triangle étant, par hypothèse, une figure symétrique, doit être isoscèle. Donc, si l'on abaisse la perpendiculaire CE sur le côté AB, la similitude des triangles AEB, AEC prouve que AEC est aussi isoscèle, et que la hauteur EC est égale à la moitié de la base AB; donc les quantités qui entrent dans les formules (415) sont dans ce cas,

$$a^2 = \textit{aire triangle} = AC^2,$$
$$n = G = \tfrac{1}{3} CE,$$
$$b = AC = CE;$$

par conséquent, en mettant ces valeurs dans cette formule, elle se réduit à

$$mO = \frac{2CE}{3},$$

et si l'on retranche de cette valeur la distance de O au niveau AB de l'eau, comme O est au tiers de CE, à partir de la base du triangle, il restera $\frac{1}{3}$CE, pour la distance mC du métacentre au niveau de l'eau. Donc, *dans une carène symétrique dont la base est un triangle rectangle, le métacentre de chaque coupe verticale est autant au-dessus du niveau de l'eau que le centre de gravité de la coupe est au-dessous.*

581. Si nous appliquons la formule (415) au corps régulier dont la coupe est ABE, nous verrons que la quantité b est ici égale à AC, et que a^2, qui exprime la surface de la coupe, équivaut à AC × CE = CE², et qu'enfin le centre de gravité de la coupe étant distant du niveau de l'eau d'une quantité égale à $\frac{1}{3}$CE, comme tous les centres de gravité des autres coupes en sont tous distans de la même quantité, il doit en être de même du centre de gravité G de tout le corps; d'où il suit que G = $\frac{1}{3}$CE. Substituant ces valeurs dans l'équation (415), on aura encore

$$mO = \tfrac{2}{3} CE;$$

d'où l'on conclura que la même propriété, qui est énoncée art. 580, a également lieu pour le métacentre de toute la carène.

582. Si l'on imagine maintenant que le poids du corps soit concentré à son centre de gravité, on peut déterminer, par la théorie du pendule composé, les oscillations de ce corps autour du métacentre. Pour cela, changeons la position des axes des coordonnées, en plaçant l'origine au centre de gravité; il suffira ensuite de mettre la valeur convenable de y, dans la formule (337), qui, comme on l'a vu à la fin de l'article 485, revient à celle-ci :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gy_{,}}{k^2 + a^2} \ldots (416);$$

car, à l'aide de cette équation, on pourra parvenir à connaître la vitesse angulaire ω, et ensuite à trouver le temps t de l'oscillation. Mais il est à remarquer que l'axe des y, employé dans cette formule, ayant été placé perpendiculairement à la direction de la pesanteur, notre axe des x devient l'axe des y de la formule (416); par conséquent, l'ordonnée $y_{,}$, qui détermine le moment du centre de gravité par rapport au plan des x, z, devra être remplacée par l'abscisse $x_{,}$, qui détermine le moment du centre de gravité par rapport au plan des y, z.

583. Pour obtenir la valeur de cette abscisse, nous avons vu, art. 576, que la distance du métacentre m, au centre de gravité O de la carène, avait pour expression Fig. 237.

$$\frac{2\int y^3 dx}{3V};$$

appelons A cette quantité, et nommons B la distance de O en G (fig. 237), nous aurons donc

$$Gm = A + B.$$

Mais il faut remarquer que le point G pouvant tomber au-dessus de O, art. 566, on peut avoir aussi

$$Gm = A - B;$$

par conséquent nous comprendrons les deux cas en écrivant

$$Gm = A \pm B.$$

Cela posé, l'angle LmG (fig. 237), formé par la verticale mL avec la nouvelle direction de cet axe, étant représenté par θ, nous aurons Fig. 237.

$$GL = Gm \sin\theta;$$

remplaçant le sinus par l'arc, parce que cet arc est très petit, et substituant la valeur de Gm, cette équation deviendra

$$GL = (A \pm B)\theta;$$

mettant cette valeur de y, dans la formule (416), nous obtiendrons

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g(A \pm B)\theta}{k^2 + a^2}.$$

584. D'un autre côté, la vitesse angulaire ω étant celle qui correspond à l'espace circulaire θ décrit avec l'unité pour rayon, cette vitesse sera égale à la différentielle de cet espace, divisée par dt, c'est-à-dire à $\frac{d\theta}{dt}$;

Fig. 237. et comme, lorsque le temps s'accroît, l'arc ln (fig. 237) diminue, on doit supposer $d\theta$ négatif. (*Voyez* la note de l'art. 365.) On aura donc

$$\omega = -\frac{d\theta}{dt} \dots \quad (417);$$

en multipliant ces deux équations par ordre, cela suffira pour éliminer dt, et l'on obtiendra

$$\frac{g(A \pm B)}{k^2 + a^2}\theta d\theta + \omega d\omega = 0;$$

faisant, pour abréger,

$$\frac{g(A \pm B)}{k^2 + a^2} = E \dots \quad (418),$$

et multipliant par 2, pour qu'on puisse immédiatement intégrer, on aura

$$2E\,\theta d\theta = 2\omega d\omega;$$

effectuant l'intégration, il viendra

$$E\theta^2 + \omega^2 = C;$$

d'où l'on tirera

$$\omega = \sqrt{C - E\theta^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (417), on trouvera

$$dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{C - E\theta^2}};$$

divisant par E, sous le radical, et multipliant en dehors par $\sqrt{E}$, cette équation donnera

$$dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{E}\sqrt{\frac{C}{E} - \theta^2}},$$

et donnera en l'intégrant

$$t = \frac{1}{\sqrt{E}} \text{arc}\left(\cos = \frac{\theta\sqrt{E}}{\sqrt{C}}\right) + C';$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\theta\sqrt{E}}{\sqrt{C}} = \cos\left[(t - C')\sqrt{E}\right].$$

Il sera facile de déduire de là

$$\theta = \frac{\sqrt{C}\left[\cos(t - C')\sqrt{E}\right]}{\sqrt{E}}.$$

585. Lorsque E sera négatif, le radical qui affecte le second membre de cette équation devenant une quantité imaginaire, la valeur de l'arc θ décrit par nl (fig. 237) cessera d'être réelle, et l'oscillation ne pourra plus avoir lieu; mais, pour que E soit négatif, il faut que le premier terme de l'équation (418) se détermine négativement, et que par conséquent l'on ait Fig. 237.

$$A \pm B = \textit{nombre négatif},$$

c'est ce qui arrive lorsque B surpasse A, et comporte le signe inférieur. Mais nous avons vu, art. 583, que B étant la valeur de la droite Gm, cette valeur, art. 582, n'était négative que quand le centre de gravité O de la carène était au-dessous du centre de gravité G. Il suit de là que le corps ne peut être dans une position d'équilibre instantané que dans ce cas; car c'est le seul où les oscillations peuvent devenir impossibles.

Au contraire, lorsque le centre de gravité O de la carène sera au-dessus du centre de gravité G du corps, la valeur de B se déterminera positivement, et celles de θ et de ω seront réelles; d'où il suit que les oscillations pourront avoir lieu: et comme la détermination de leur durée s'effectue absolument par le même moyen que nous avons employé lorsque nous avons traité du pendule composé, nous pourrons en conclure qu'elles sont d'égale durée. Cela suffit pour nous faire reconnaître que lorsque le centre de gravité de la carène est au-dessus du centre de gravité du corps plongé dans un fluide, ce corps est dans une position d'équilibre stable.

De la Balance hydrostatique, de l'Aréomètre, de la Pesanteur de l'air, du Siphon, et de l'Élasticité de l'air.

586. Soit M un corps dont le poids est P; si ce corps est plongé dans un fluide, il perdra de son poids une quantité égale au volume du fluide qu'il déplace; par conséquent, il faudra

ôter une partie P' du poids P pour rétablir l'équilibre : ce poids enlevé P' sera donc égal à celui du volume du fluide déplacé.

Par exemple, si M est une sphère de plomb du poids de 11 hectogrammes, et qu'on trouve, lorsqu'elle est plongée dans un fluide, qu'elle ne pèse plus que 10 hectogrammes, on en conclura que la gravité du plomb est à celle de ce fluide, comme 11 est à 1.

Si l'on voulait déterminer la pesanteur spécifique ou densité d'un fluide, celle de l'huile d'olive, par exemple, on plongerait la même sphère dans ce fluide, et ayant trouvé que son poids est réduit à $10^h,085$, on conclurait que le volume du fluide déplacé est égal à $0^h,915$; et comme en plongeant cette sphère de plomb dans l'eau, on a déjà trouvé que le volume d'eau déplacée était de 1^h, en comparant les volumes déplacés des deux fluides, on trouverait que leurs densités sont entre elles comme 1 est à 0,915.

Il suit de ce qui précède que deux corps de volumes inégaux étant mis en équilibre dans le vide, cesseront de l'être lorsqu'ils seront plongés dans l'air ; car le plus volumineux de ces corps perdra une plus forte partie de son poids que l'autre.

587. L'aréomètre, ou pèse-liqueur, est un instrument qui fait connaître les pesanteurs spécifiques des fluides : il est composé d'un cylindre de verre qui, dans sa partie inférieure, est soudé à un petit globe de verre rempli de mercure ; l'autre extrémité de ce cylindre est terminée par un tube gradué. Lorsqu'on plonge l'aréomètre dans un fluide, le mercure qui sert à le lester lui fait prendre une position verticale, et il s'enfonce d'autant plus dans le fluide, que ce fluide a moins de densité. Alors la division du tube gradué fait connaître la pesanteur spécifique du fluide. Par exemple, la température étant à 10 degrés du thermomètre de Réaumur, si l'on plonge l'aréomètre dans de l'eau distillée, le niveau du fluide effleurera le 10e degré de l'aréomètre ; plongé ensuite dans le vin, il indiquera le 11e, le 12e ou le 13e degré ; dans l'eau-de-vie, il descendra encore

et s'arrêtera entre 15 et 20, ou entre 21 et 35, selon que cette eau-de-vie sera simple ou rectifiée.

D'après ce qui précède, on voit que la construction de l'aréomètre est fondée sur ce principe, qu'un corps plongé dans un fluide, perd une partie de son poids égale à celui du fluide déplacé ; donc, plus le fluide aura de densité, plus l'aréomètre diminuant de poids surnagera.

588. Galilée, le premier, reconnut la pesanteur de l'air ; Toricelli, son disciple, la démontra par l'expérience suivante. Soit AB (fig. 238) un tube de verre situé verticalement et rempli Fig. 238.
de mercure ; si l'on renverse ce tube de manière qu'en gardant toujours une position verticale, la partie inférieure A prenne la place de la partie supérieure, et que l'on plonge ce tube (fig. 239) Fig. 239.
dans un vase plein de mercure, il se fera, à la partie BE du tube, un vide qui sera occasionné par la descente du mercure qui s'arrêtera en E lorsque la colonne de mercure comprise depuis E jusqu'à la base horizontale CD du mercure sera d'environ 28 pouces, ou de $0^m,76$.

Cette colonne de mercure ne se soutient que par la pression de l'air extérieur qui, pressant la surface CD, fait équilibre au mercure renfermé dans le tube.

Les fluides qui ont des densités différentes doivent donc s'élever à des hauteurs différentes ; c'est ce qu'on a vérifié sur l'eau. En effet, l'eau étant d'une densité qui est à peu près $13\frac{1}{2}$ fois moindre que celle du mercure, devra s'élever à une hauteur qui sera en raison inverse des densités de ces fluides. Ainsi l'eau s'élèvera à une hauteur exprimée par $28^{po} \times 13\frac{1}{2}$, nombre qui diffère peu de 32^{pieds}, ou de $10^m,4$, hauteur à laquelle on a reconnu qu'une pompe aspirante pouvait élever l'eau.

Dans cette pompe, le piston qui était à la surface de l'eau s'étant élevé jusqu'à une certaine hauteur, il se fait un vide dans le corps de pompe ; alors l'eau pressée par l'air environnant, monte dans ce vide de la même manière que s'élève le mercure dans le tube de Toricelli.

589. Le mécanisme du siphon s'explique aussi par la pression de l'air. On appelle *siphon* un tube recourbé, dans lequel l'une des branches est plus longue que l'autre. La branche EF
Fig. 240. (fig. 240) qui est la plus courte, est plongée dans un vase ABCD plein de liqueur; alors si en aspirant l'air par l'ouverture G, on fait le vide, la pression de l'air agissant sur la surface BC du fluide, fera monter l'eau dans le siphon, et le fluide se videra par la branche FG.

590. L'air est un fluide élastique qui se comprime sensiblement en raison directe du poids qui le presse.

Fig. 241. Voici une expérience qui va le prouver. Soit ABCE (fig. 241) un tube recourbé et fermé hermétiquement au point E : si par l'ouverture A', on fait entrer du mercure qui remplisse la partie du tube comprise depuis A jusqu'en D, lorsque AB sera de $76^{\text{centim.}}$ (*), le mercure DC occupera la moitié de la branche CE; et si l'on verse encore du mercure dans le tube jusqu'à ce que $A'b$ soit de deux fois $76^{\text{centim.}}$, l'espace Ed rempli par l'air sera réduit au tiers de CE; et ainsi de suite.

Cette expérience prouve la compression de l'air; car lorsqu'il n'y avait point de mercure dans le tube, l'air CE faisait équilibre à une colonne d'air de même poids que celui d'une colonne de mercure de $76^{\text{centim.}}$ de haut; lorsqu'on verse ensuite du mercure, et que AB est de $76^{\text{centim.}}$, l'air renfermé dans ED fait donc équilibre à un poids de deux fois $76^{\text{centim.}}$, et cet air

(*) On suppose que l'expérience soit faite à Paris, où la hauteur moyenne du mercure, dans le baromètre, est de $0^{m},76$; et l'on sent que, dans un autre lieu, le mercure pourrait n'être pas à la même hauteur.

Sous le Pont-Royal, et au niveau des moyennes eaux de la Seine, lorsque le thermomètre indique 12°, la hauteur moyenne du baromètre est, d'après M. Biot, de $0^{m},76$. M. Shuckburg, qui a mesuré avec beaucoup de précision la hauteur moyenne du baromètre à la latitude de 45° (*division nonag.*), l'a trouvée de $0^{m},7629$. Le thermomètre était à 12°,8.

n'occupe plus que la moitié de CE. On voit de même que l'espace Ed, occupé par l'air, sera réduit au tiers de EC lorsque BA' sera de deux fois 76^{cent}; ainsi de suite.

Si l'on ôte successivement le mercure du tube, l'air se rétablit dans son état primitif; ce qui prouve qu'il a encore la propriété d'être fluide parfaitement élastique.

Des Pompes.

591. Une pompe est une machine composée d'un tuyau qui, à l'aide du ressort de l'air, fait monter l'eau.

Il y a trois sortes principales de pompes : 1° la pompe aspirante ; 2° la pompe foulante ; 3° la pompe aspirante et foulante.

La pompe aspirante (fig. 242) est formée de l'assemblage de deux tuyaux ABCD, CDHL unis ensemble, et dont le premier est le tuyau d'aspiration, et le second le corps de pompe. Le jeu du piston est l'espace MNHL, dans lequel il peut se mouvoir. Voici l'effet de la pompe aspirante. Fig. 242.

Cette pompe étant placée de manière que sa partie inférieure AB soit au niveau de l'eau, si l'on élève le piston de MN en HL, il se fait un vide dans l'espace ML; l'air que renferme CN s'y précipite, et, devenu moins dense que l'air atmosphérique renfermé dans le tuyau d'aspiration AD, cet air atmosphérique soulève la soupape k, et diminue aussi de densité; alors, ne pouvant plus faire équilibre à l'air atmosphérique qui repose sur la surface extérieure du fluide, celui-ci presse cette surface, et fait monter l'eau jusqu'en A'B'; et l'équilibre se rétablira, parce que l'air extérieur sera contrebalancé par la colonne d'eau AB', jointe à l'air renfermé dans A'L. En ce moment, la soupape k ne se trouvant plus entre deux airs de densités différentes, retombera par son propre poids, et se fermera. Abaissant de nouveau le piston de HL en MN, l'air renfermé dans MD se condensera de plus en plus, et ne tendra qu'à presser encore davantage la soupape k. Ainsi l'air renfermé dans A'D

ne pouvant communiquer avec celui qui est au-dessus de la soupape k, conservera le ressort qu'il avait lorsque le piston était en HL; par conséquent la colonne d'eau AB′ se maintiendra toujours à la même hauteur. Nous venons de voir qu'à mesure qu'on faisait descendre le piston, l'air qu'il presse contre CD se condensait. Lorsque ce piston sera ramené en MN, il aura repoussé dans MD, non-seulement l'air atmosphérique qui y était primitivement contenu, mais encore il y aura fait entrer une partie de l'air dont la colonne d'eau AB′ tient là place. Ainsi l'air contenu dans MD devrait être plus dense que l'air atmosphérique; il ne l'est pas cependant, parce qu'on a pratiqué dans le piston une soupape I qui s'ouvre dès que l'air contenu dans MD a plus de ressort que l'air atmosphérique situé au-dessus du piston. Élevant pour la seconde fois le piston, une partie de l'air contenu dans A′D montera dans le corps de pompe, comme nous l'avons expliqué, et l'équilibre sera rompu de nouveau. Pour le rétablir, il faudra que l'eau monte de A′B′ en A″B″; de sorte qu'après un certain nombre de coups de piston, l'eau parviendra jusqu'à la soupape k, la soulèvera et entrera dans le corps de pompe, s'y élèvera successivement, et sortira par l'ouverture QR.

592. Examinons maintenant le mécanisme de la pompe foulante. Dans cette pompe, le piston MNP (fig. 243) descendant de MN en HL, s'enfonce dans le fluide, et il se fait un vide dans l'espace ML; alors l'eau qui est au-dessous du piston, chargée d'ailleurs de la colonne d'eau qui presse la surface du fluide, se précipite dans ce vide au moyen d'une ouverture faite au piston, et recouverte d'une soupape qui se ferme.

Fig. 243.

Si l'on fait ensuite remonter le piston, lorsqu'il sera revenu en MN, l'eau qui repose sur la base de ce piston tiendra la place d'une partie de l'air que renfermait l'espace MNCD; par conséquent, cet air se comprimera, et devenant plus dense que l'air atmosphérique, il soulèvera la soupape k, et sortira par cette ouverture jusqu'à ce qu'il ait repris la densité de l'air

atmosphérique. Ainsi, à part l'eau qui repose sur le piston, tout reviendra dans le même état qu'avant le premier coup de piston; par conséquent, si l'on fait descendre de nouveau le piston, l'eau du vase montera encore dans la pompe; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'eau s'introduise dans le corps de pompe en soulevant la soupape k.

593. En combinant les effets de ces deux pompes, on a imaginé la pompe aspirante et foulante. Dans cette pompe, si l'on élève le piston MNP (fig. 244), l'eau, en pressant la soupape L, montera par le tuyau ABCD, et pénètrera dans la partie MCDEF. Ainsi, au bout de plusieurs coups de piston, l'eau s'accumulera dans l'espace MCDEF; le piston, en descendant ensuite, comprimera l'eau, et la faisant sortir par la soupape I, l'introduira dans le tuyau FGHK. Fig. 244.

594. Il est possible que la pompe aspirante ait des dimensions telles, que l'eau ne puisse s'élever au-delà d'une certaine hauteur. Pour connaître dans quel cas cela peut arriver, simplifions le problème, et considérons une pompe dans laquelle le tuyau aurait partout le même diamètre, et supposons que l'eau se soit élevée jusqu'au plan horizontal dont ZX (fig. 245) est le profil, et que le piston ne se meuve que dans l'espace compris entre HL et MN; nommons Fig. 245.

a le jeu LN du piston,
b la longueur LB,
x la distance de L en X.

Lorsque le piston s'est élevé de MN en HL, il a parcouru toute sa course; alors l'air qui était d'abord contenu dans ZN, occupe l'espace ZL, et par conséquent diminue de ressort dans le rapport de NX à LX; de sorte que si R était le ressort de l'air atmosphérique contenu dans NZ, le ressort R′ de l'air raréfié contenu dans ZL, sera donné par la proportion

$$LX : NX :: R : R',$$

ou

$$x : x - a :: R : R';$$

donc

$$R' = \frac{x-a}{x} R.$$

Cela posé, l'air contenu dans NZ étant de même densité que celui de l'air extérieur, son ressort R doit être mesuré par une colonne d'air dont la base c équivaudrait au cercle qui aurait MN pour diamètre, et dont la hauteur serait de 32 pieds, c'est-à-dire de $10^m,4$. Soit h cette hauteur, donc

$$R = ch.$$

Si l'on met cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera

$$R' = \frac{x-a}{x} \times ch.$$

Or il est évident que le ressort R' de l'air renfermé dans ZL, joint à l'eau qui occupe le cylindre ABZX, doit contrebalancer la pression de l'air atmosphérique. La colonne d'eau renfermée dans le cylindre ABZX a pour volume le produit de la base c par la hauteur BX ou $c \times (b-x)$. A l'égard de la pression de l'air atmosphérique, elle sera représentée par ch; par conséquent, nous aurons

$$\frac{x-a}{x} \times ch + (b-x)\, c = ch;$$

supprimant le facteur commun c, il restera

$$h\left(\frac{x-a}{x}\right) + b - x = h.$$

Dans ce cas, il y aura équilibre entre l'air extérieur et la colonne d'eau; mais si l'eau doit monter, il faudra que la pression de l'air extérieur l'emporte sur celle de l'eau renfermée dans le cylindre ABZX et de l'air compris dans ZL, et que l'on ait, par conséquent,

$$h\left(\frac{x-a}{x}\right) + b - x < h;$$

en représentant par z l'excès du second membre de cette inégalité sur le premier, on aura

$$h\left(\frac{x-a}{x}\right)+b-x+z=h.$$

Chassant le dénominateur x et réduisant, on obtiendra

$$-ah+bx-x^2+xz=0,$$

d'où l'on tirera

$$x=\frac{b+z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b+z}{2}\right)^2-ah}.$$

Si l'on fait $z=0$, l'eau s'arrêtera en ZX, et l'on aura

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-ah}.$$

Ces deux valeurs de x seront toujours réelles, si $\frac{b^2}{4}$ surpasse ah : lorsque cette condition sera remplie, l'eau pourra s'arrêter en deux points; mais il n'en sera pas de même si ah surpasse $\frac{b^2}{4}$; car alors les deux racines de x étant imaginaires, l'eau ne pourra s'arrêter, et la pompe aura tout son effet.

595. A l'égard de la pompe foulante, on élèvera toujours l'eau, avec cette pompe, à la hauteur que l'on voudra, pourvu que la force motrice soit proportionnelle à l'effort que supporte le piston. Supposons que l'eau soit montée dans la pompe jusqu'en EF (fig. 243), le niveau du fluide environnant se trouvera au-dessous. Or il peut arriver deux cas : ou le piston est au-dessous du niveau de l'eau environnante, ou il est au-dessus. Dans le premier, soit ab le niveau de l'eau environnante; le piston MNP n'est point chargé de l'eau comprise entre MN et ab, parce que cette eau est contrebalancée par le fluide extérieur; donc le piston ne soutient que l'eau renfermée entre ab et EF. Or le poids de cette colonne d'eau s'évalue par celui Fig. 243.

d'un cylindre d'eau dont la base serait la surface MN du piston, et dont la hauteur serait égale à la distance des deux plans EF et *ab*.

596. Mais si le niveau est en *a'b'* et le piston au-dessus
Fig. 243. (fig. 243), soit P le poids de la colonne d'eau comprise entre MN et *a'b'*; cette colonne d'eau n'étant soutenue que par l'air extérieur qui presse l'eau environnante, diminuera de son poids P le ressort de l'air extérieur. Ainsi le ressort de l'air atmosphérique qui est au-dessus du piston surpassera de P le ressort de l'air extérieur. Cet excès de pression agira sur la base MN du piston. L'effet sera donc le même que si le piston supportait le poids P de la colonne d'eau comprise entre *a'b'* et MN; et comme d'une autre part le piston est surchargé d'une colonne d'eau qui s'étend depuis MN jusqu'en EF, il en résulte que la base MN supportera une pression mesurée par le cylindre dont MN serait la base, et qui aurait pour hauteur la distance comprise entre les plans *a'b'* et EF.

Ainsi, pourvu qu'on emploie un effort suffisant, on élèvera toujours l'eau à la hauteur que l'on voudra, au moyen de la pompe foulante.

Du Baromètre.

Fig. 246. 597. Le baromètre est un tube recourbé ABC (fig. 246), rempli de mercure dans la partie NMBEF de sa capacité; l'extrémité supérieure AMN de ce tube est vide d'air et entièrement close en A, tandis que l'autre extrémité C est ouverte. Si par la surface FE on mène un plan qui coupe le tube en un point D, la colonne de mercure comprise depuis D jusqu'en M sera, comme on l'a vu, d'environ 28^pouces ou 10^m,4 de hauteur, et mesurera le poids d'une colonne atmosphérique de même base.

598. Le baromètre fait connaître la plus ou moins grande densité de l'atmosphère; car lorsque l'air augmente de den-
Fig. 246. sité, la surface FE (fig. 246) du mercure éprouvant une plus

grande pression, il faut une plus grande colonne de mercure pour faire équilibre à cette pression : ainsi le mercure s'élève davantage dans le tube. Par la même raison, la colonne de mercure doit s'abaisser lorsque l'air atmosphérique devient plus léger.

599. D'après ces observations, le baromètre peut être employé à mesurer la hauteur d'une montagne, ou en général la hauteur verticale d'un pays au-dessus de la surface de la terre. Pour cet effet, soient

h la hauteur du mercure à la surface de la terre,
h' la hauteur du mercure au haut de la montagne,

ρ et ρ' les densités de l'atmosphère correspondantes à h et à h'. Nous avons vu, art. 552, que l'équation générale des fluides pesans était

$$dp = \rho g dz \text{ (*)};$$

supposons que le plan des x, y soit horizontal, et plaçons-le à la surface de la terre. Lorsqu'on s'élèvera dans l'atmosphère, la densité deviendra ρ', et z croîtra, tandis que p diminuera : il faut donc, d'après la note de l'article 439, prendre dp et dz de signes contraires ; ce qui nous donnera

$$dp = -\rho' g dz \ldots \quad (419).$$

(*) Pour parvenir directement à ce résultat, considérons une colonne atmosphérique (fig. 247) dont la base AB est l'unité de surface : la pression que cette base supportera sera mesurée par le poids de la colonne atmosphérique CABD ; par conséquent, la pression élémentaire dp peut être représentée par le poids d'une tranche dont dz serait la hauteur infiniment petite. Or, la base de cette tranche étant égale à l'unité de surface, son volume sera exprimé par dz, et sa masse par ρdz ; donc en multipliant cette expression par g, on aura $g\rho dz$ pour le poids qui mesurera la pression dp. Observons que cette démonstration a lieu, quelle que soit la forme de la base plane AB, que nous avons prise pour unité de surface. Fig. 247.

Si les lieux des observations sont peu distans, on pourra regarder la pesanteur g comme constante, et en intégrant dans cette hypothèse, on aura

$$z = -\frac{1}{g}\int\frac{dp}{\rho'} \ldots (420).$$

Or la température étant supposée constante, nous avons vu, art. 548, que la pression p était proportionnelle à sa densité, condition exprimée par l'équation

$$p = \Pi\rho';$$

en faisant donc varier p et ρ' dans cette équation, nous en tirerons

$$dp = \Pi d\rho';$$

substituant cette valeur de dp dans l'équation (420), nous trouverons

$$z = -\frac{\Pi}{g}\int\frac{d\rho'}{\rho'};$$

effectuant l'intégration indiquée, il viendra

$$z = -\frac{\Pi}{g}\log\rho' + C.$$

Pour déterminer la constante, observons que lorsque $z=0$, la densité est celle qui a lieu à la surface de la terre, où nous avons placé le plan des y, x. Cette densité sera donc celle que nous avons désignée par ρ. Ainsi l'équation précédente nous donnera

$$0 = -\frac{\Pi}{g}\log\rho + C;$$

éliminant C entre cette équation et la précédente, nous aurons

$$z = \frac{\Pi}{g}(\log\rho - \log\rho'),$$

ou

$$z = \frac{\Pi}{g} \log \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Or les densités étant proportionnelles aux pressions, elles le sont aussi aux hauteurs observées h et h'; donc

$$h : h' :: \varrho : \varrho' ;$$

tirant de cette proportion la valeur de ϱ, et la substituant dans celle de z, on obtient

$$z = \frac{\Pi}{g} \log \frac{h}{h'}.$$

Le logarithme indiqué appartenant au système népérien, si nous représentons par $\text{Log}\,\frac{h}{h'}$ le logarithme tabulaire de $\frac{h}{h'}$, et par M le module 2,302585o9, nous savons que l'on a

$$\text{M}.\text{Log}\,\frac{h}{h'} = \log \frac{h}{h'};$$

substituant il viendra

$$z = \frac{\text{M}\Pi}{g} \text{Log}\,\frac{h}{h'} \ldots (421).$$

600. Pour déterminer la constante Π qui est la pression sur l'unité de densité du fluide, nous remarquerons qu'à l'origine la densité étant ϱ, cette densité n'est autre chose qu'un cube d'air dont l'une des faces serait égale à l'unité de surface; la pression qui agit sur ce cube doit être mesurée par la colonne d'air qui, à la surface de la terre, reposerait sur l'unité de surface : or cette colonne d'air est égale à une colonne de mercure qui s'élèverait à une hauteur h. Si nous appelons ϱ'' la densité du mercure, la masse de cette colonne sera représentée par $h\varrho''$. Multipliant ce produit par la pesanteur g, le poids de la colonne de mercure, au bas de la montagne, sera donc représenté par $gh\varrho''$: telle sera la pression sur la densité ϱ. Pour en déduire la pres-

sion Π sur l'unité de densité, il suffira d'établir la proportion

$$\varrho : 1 :: gh\varrho'' : \Pi;$$

d'où l'on tirera

$$\Pi = \frac{gh\varrho''}{\varrho};$$

substituant cette valeur dans la formule (421), il viendra

$$z = \frac{Mh\varrho''}{\varrho} \operatorname{Log} \frac{h}{h'};$$

prenant pour unité la densité du mercure, cette formule se réduira à

$$z = \frac{Mh}{\varrho} \operatorname{Log} \frac{h}{h'} \ldots \quad (422).$$

601. Si, dans deux pays, la hauteur h du mercure est la même, et que la pesanteur dans l'un étant prise pour unité, devienne dans l'autre $1 - \delta$, le mercure que renferme le baromètre dans le second pays deviendra plus léger ou plus lourd, selon que δ sera positif ou négatif. Pour fixer les idées, supposons δ positif; alors $1 - \delta$ sera une quantité plus petite que l'unité, parce que la variation de la pesanteur étant peu sensible, on est en droit de supposer que la variation de pesanteur δ est au-dessous de l'intensité de la pesanteur qui a lieu à la latitude de 50°. Cela posé, la colonne de mercure, dans le pays où la pesanteur est $1 - \delta$, devenant plus légère, fera supporter une moindre pression à la colonne d'air qu'elle contrebalancera et qui diminuera aussi de densité. Or, en supposant que l'élasticité de l'air soit proportionnelle à la pression qu'il supporte, cette pression sera mesurée par le poids de la colonne h de mercure; et comme le rapport des gravités des deux pays est exprimé par $1 : 1 - \delta$, ce rapport sera aussi celui des poids des colonnes de mercure, dont la hauteur commune est h. Ainsi, en appelant d la densité de l'air dans le pays où la pesanteur est $1 - \delta$,

nous aurons

$$1 : 1 - \delta :: \varrho : d;$$

d'où nous tirerons

$$d = \varrho (1 - \delta).$$

Cette valeur devra remplacer la densité de l'air dans la formule (422), pour qu'elle se rapporte au pays où la pesanteur est $1 - \delta$, et cette formule deviendra

$$z = \frac{Mh}{\varrho (1 - \delta)} \operatorname{Log} \frac{h}{h'} \ldots \quad (423).$$

En comparant les résultats des observations faites en différens lieux à l'aide du pendule, on a trouvé que si l'on supposait la pesanteur égale à l'unité, à la latitude de 50° (div. décim.), la différence δ deviendrait $0{,}0028371 \cos 2\psi$, lorsqu'on passerait dans un pays dont la latitude serait ψ. Mettant cette valeur de δ dans la formule (423), on obtient

$$z = \frac{Mh \operatorname{Log} \frac{h}{h'}}{\varrho (1 - 0{,}0028371 \cos 2\psi)}.$$

D'après cette valeur, on voit que δ est une très petite fraction ; par conséquent, si dans l'équation (423) on remplace $\frac{1}{1-\delta}$ par son développement $\delta + \delta^2 + \delta^3 +$ etc., donné par la division, et qu'on néglige les termes δ^2, δ^3, etc., comme très petits devant δ, on pourra mettre $1 + \delta$ au lieu de $\frac{1}{1-\delta}$; alors la valeur de z deviendra

$$z = \frac{Mh}{\varrho} (1 + 0{,}0028371 \cos 2\psi) \operatorname{Log} \frac{h}{h'} \ldots (424).$$

602. Pour modifier cette formule convenablement au cas où l'on a égard à la variation de la température, nous remarquerons que, d'après diverses expériences, M. Gay-Lussac a trouvé que dans l'intervalle de 0 à 100° du thermomètre centi-

grade, un air parfaitement sec se dilatait de 0,00375 par degré du thermomètre; mais en ayant égard à l'humidité qu'il peut contenir, on a fixé la dilatation de ce fluide à environ $\frac{1}{250}$ par degré. Il a été aussi reconnu que, dans les mêmes circonstances, le mercure se condensait de $\frac{1}{5412}$ par degré. Ainsi un volume d'air représenté par 1 à la température 0, deviendra $1+\frac{n}{250}$ lorsque le thermomètre montera au degré n; et comme la densité d'un fluide est en raison inverse du volume qu'il occupe, il suit de là que la densité de l'air à la température n, sera exprimée par

$$\frac{\varrho}{1+\frac{n}{250}};$$

par conséquent, si nous prenons pour n un terme moyen entre les températures t et t' à la surface de la terre et au sommet de la montagne, nous remplacerons n par $\frac{t+t'}{2}$, et la densité de l'air deviendra

$$\frac{\varrho}{1+\frac{t+t'}{500}} \dots (425).$$

Le mercure se condensant à mesure qu'on s'élève sur la montagne, et que le thermomètre s'abaisse par le refroidissement de l'air, la colonne de mercure observée au sommet de la montagne est moins haute que celle qui aurait eu lieu si la température fût demeurée constante : ainsi, d'après l'observation précédente, il faudra, pour avoir la hauteur du baromètre dans l'hypothèse de la température constante, augmenter h' de $\frac{h'}{5412}$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans la

différence des températures du mercure à la surface de la terre et au sommet de la montagne. Or si nous appelons T et T′ ces températures, elles seront indiquées par un thermomètre en contact avec un baromètre (*), et nous devrons, au lieu de h', mettre dans la formule (424), la quantité

$$h' + \frac{h'(\mathrm{T}-\mathrm{T}')}{5412};$$

substituant donc dans l'équation (424) cette valeur, et remplaçant ϱ par $\dfrac{\varrho}{1+\dfrac{t+t'}{5412}}$, nous obtiendrons

$$z = \frac{\mathrm{M}h}{\varrho}\left(1+\frac{t+t'}{500}\right)(1+0{,}0028371\cos 2\psi)\,\mathrm{Log}\,\frac{h}{h'\left(1+\dfrac{\mathrm{T}-\mathrm{T}'}{5412}\right)}.$$

603. Supposons que l'observation qui détermine la hauteur h du mercure, soit faite à la latitude de 50° au bord de la mer, c'est-à-dire à la surface de la terre, on aura

$$\cos 2\psi = 0,$$

et la formule précédente nous donnera

$$\frac{\mathrm{M}h}{\varrho} = \frac{z}{\left(1+\dfrac{t+t'}{500}\right)\mathrm{Log}\dfrac{h}{h'\left(1+\dfrac{\mathrm{T}-\mathrm{T}'}{5412}\right)}} \ldots (426).$$

Si l'on mesure trigonométriquement z, et que, par un résultat moyen entre plusieurs observations, on détermine h, h', t, t', T, T′, le second terme de l'équation (426) sera en-

(*) Il est à observer qu'en se transportant dans un lieu, le mercure du baromètre ne s'y met pas de suite à la température de l'air environnant ; c'est pourquoi nous faisons une différence entre t' et T′, et entre t et T.

tièrement déterminé, et fera connaître la valeur de la constante $\frac{Mh}{\varrho}$. On a trouvé que cette constante est égale au nombre 18393 mètres. Mettant cette valeur à la place de $\frac{Mh}{\varrho}$ dans la valeur de z, on aura la formule suivante :

$$z = 18393^{m}\left(1+\frac{t+t'}{500}\right)(1+0{,}0028371\cos 2\psi)\,\mathrm{Log}\frac{h}{h'\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)}.$$

Ceux qui s'occupent d'observations météorologiques, l'emploient ordinairement pour mesurer les hauteurs verticales, à l'aide du baromètre.

FIN DE L'HYDROSTATIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

HYDRODYNAMIQUE.

De l'écoulement d'un fluide par un orifice horizontal, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches.

604. Lorsqu'un fluide contenu dans un vase sort par une ouverture pratiquée au fond de ce vase, il a été constaté par l'expérience que la surface extérieure du fluide se maintenait sensiblement dans une situation horizontale, tout comme si le vase n'était pas percé. Par conséquent, si l'on imagine que la masse du fluide soit divisée en tranches horizontales, ces tranches conserveront sensiblement leur parallélisme à mesure qu'elles s'abaisseront et que le vase se videra; et les molécules qui les composent seront censées descendre verticalement. Ce n'est pas qu'en examinant la chose à la rigueur, ces molécules ne soient soumises à des mouvemens horizontaux qui s'opposent à cette direction verticale. En effet, si le vase n'a pas la forme d'un cylindre, une tranche ne peut prendre la place de celle sur laquelle elle repose, sans augmenter ou diminuer sa largeur aux dépens de son épaisseur, et, par conséquent, sans que les molécules qui la composent n'éprouvent des mouvemens dans le sens horizontal. D'ailleurs, outre ces mouvemens dus à la forme du vase, les molécules qui sont situées proche de l'ouverture manquant d'appui, y forment une espèce d'entonnoir qui tend à écarter de la direction verticale les molécules environnantes; mais nous ferons abstraction de toutes ces cir-

constances qui compliqueraient trop le problème, et qui d'ailleurs ne sont que d'une faible influence lorsque le vase, comme cela se rencontre souvent, est d'une forme qui diffère peu de celle d'un cylindre.

Fig. 248. 605. Supposons donc que l'ordonnée z (fig. 248) mesure la distance mO de l'une des tranches du fluide à un plan horizontal AB, suivant lequel nous placerons celui du niveau; la surface interne du vase étant donnée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, nous en déduirons l'aire s de la tranche qui répond à l'ordonnée z. Par conséquent, en multipliant cette aire par l'épaisseur dz, nous aurons sdz pour le volume de cette tranche. Cela posé, il est facile de voir que toutes les molécules qui la composent ont la même vitesse; car, dans notre hypothèse, elles arrivent en même temps, par un chemin vertical, au plan horizontal qui sert de base à cette tranche. Au contraire, la vitesse cessera d'être constante lorsque nous la considérerons dans deux tranches différentes; en effet, le fluide étant incompressible, une tranche quelconque ne peut descendre de la hauteur dz dans l'instant dt, sans qu'il ne sorte par l'orifice une quantité de fluide égale au volume de la tranche qui est disparue. Or, si nous appelons u la vitesse qui a lieu à l'orifice
Fig. 248. EF (fig. 248) et k l'aire de cet orifice : comme la vitesse est en général exprimée par l'espace divisé par le temps, l'espace vertical parcouru dans l'instant dt sera égal à udt; donc, en multipliant l'aire k par la hauteur verticale udt, nous aurons $kudt$ pour le fluide écoulé par l'orifice dans l'instant dt. Égalant à cette quantité la valeur de la tranche disparue, il viendra

$$sdz = kudt \ldots \quad (427);$$

cette équation nous donne

$$ku = s\frac{dz}{dt} \ldots \quad (428).$$

606. Au bout du temps t, la vitesse de la tranche dont s

est la superficie, étant v, a pour expression la différentielle de l'espace vertical divisée par celle du temps, c'est-à-dire $\frac{dz}{dt}$. Remplaçant donc cette fraction par v, dans l'équation (428), on aura

$$ku = sv \ldots \quad (429).$$

Cette équation nous dit que les vitesses u et v doivent être en raison inverse des aires k et s; ce qui est d'ailleurs manifeste, car plus l'aire est étendue, moins la vitesse nécessaire pour que la tranche s'écoule doit être grande.

607. Au bout du temps dt la vitesse v deviendra $\frac{dv}{dt}dt$; mais si les molécules n'agissaient pas les unes sur les autres, la force accélératrice qui les sollicite étant g, on aurait $\frac{dv}{dt} = g$; ce qui donnerait gdt pour la vitesse dv; et, comme chaque tranche perd toute la vitesse qu'elle aurait si les particules du fluide étaient libres, moins celle qui lui reste, la vitesse perdue par une molécule de la tranche dont s est la superficie, sera donc $gdt - \frac{dv}{dt}dt$; et par conséquent la force accélératrice due à cette vitesse aura pour expression

$$g - \frac{dv}{dt}.$$

Or, par le principe de d'Alembert, le système se mettrait en équilibre si chaque tranche du fluide était sollicitée, non par la vitesse gdt due à la pesanteur, mais par la vitesse perdue $\left(g - \frac{dv}{dt}\right)dt$ qui lui correspond; cette hypothèse convertit l'équation $dp = \rho g dz$, art. 552, en

$$dp = \rho\left(g - \frac{dv}{dt}\right)dz \ldots \quad (430).$$

La différentielle dv qui entre dans cette équation, n'étant qu'un signe d'opération, il faut la remplacer par sa valeur donnée par l'équation (429), de laquelle on tire

$$v = \frac{ku}{s} \ldots \quad (431).$$

608. Le second membre de cette équation contient deux variables de nature différente, savoir : la vitesse u qui a lieu à l'orifice, et qui est une fonction du temps ; et la superficie s qui dépend non-seulement de l'ordonnée z, mais encore du temps, puisque l'ordonnée z décroît elle-même avec le temps.

Nous différentierons donc le second membre de l'équation (431) en traitant u comme une fonction de t, et s comme une fonction de la fonction z de t. Modifiant convenablement à cette hypothèse la différentielle de l'équation (431), différentielle qui en général est

$$dv = \frac{k}{s}\,du + kud.\frac{1}{s},$$

ou plutôt

$$dv = \frac{kdu}{s} - ku\,\frac{ds}{s^2},$$

nous l'écrirons ainsi :

$$dv = \frac{k}{s}\,\frac{du}{dt}\,dt - \frac{ku}{s^2}\,\frac{ds}{dz}\,\frac{dz}{dt}\,dt.$$

Tirant de cette équation la valeur de $\frac{dv}{dt}$, et la substituant dans l'équation (430), nous obtiendrons

$$dp = \rho\left(gdz - \frac{k}{s}\,\frac{du}{dt}\,dz + \frac{ku}{s^2}\,\frac{ds}{dz}\,\frac{dz}{dt}\,dz\right);$$

éliminant $\frac{dz}{dt}$ au moyen de l'équation (427), il restera

$$dp = \rho\left(gdz - k\,\frac{du}{dt}\,\frac{dz}{s} + k^2u^2\,\frac{ds}{s^3}\right).$$

609. Nous intégrerons cette équation par rapport à z, et nous remarquerons préliminairement que z n'a pu varier sans que s ne variât aussi, mais qu'il n'en est pas de même de u et de $\frac{du}{dt}$ qui sont les valeurs particulières que prennent les quantités v et $\frac{dv}{dt}$ qui correspondent à l'orifice. Ces quantités inconnues u et $\frac{du}{dt}$ peuvent donc être regardées comme constantes, tout aussi bien que les valeurs de a et de b qu'admettent dans une courbe les variables x et y en un lieu déterminé.

610. En regardant ainsi, dans cette intégration, u et $\frac{du}{dt}$ comme des constantes, on voit que toutes les intégrales qu'on doit prendre se réduisent à des fonctions de z, et par conséquent se rapportent aux dimensions du vase. Mais quand nous aurons trouvé toutes ces intégrales, nous pourrons ensuite traiter u et $\frac{du}{dt}$ comme des variables; ce sera comme si les fonctions de z, déterminées par l'intégration, nous eussent été données immédiatement, et que nous eussions établi l'équation entre ces fonctions et les quantités inconnues

$$u \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}.$$

611. En effectuant ces intégrations, nous trouverons

$$p = \rho\left(gz - k\,\frac{du}{dt}\int\frac{dz}{s} - \frac{k^2u^2}{2s^2}\right) + C \ldots \quad (432).$$

Comme la vitesse u entre dans cette équation, et qu'elle est égale à ce que devient $\frac{dz}{dt}$ à l'orifice, on voit qu'elle est en général une fonction du temps. Par conséquent, en regardant u comme constant, c'est admettre tacitement que le temps

est constant dans notre intégrale; d'où il suit qu'on doit en général supposer que C est une fonction du temps.

612. Pour déterminer cette constante, soit Π la pression
Fig. 249. qu'éprouve la surface supérieure CD du fluide (fig. 249), surface que nous désignerons par s', et que, pour plus de généralité, nous ne supposerons pas passer par le plan AB; si nous prenons l'intégrale $\int \frac{dz}{s}$ de manière qu'elle s'évanouisse en s', cette surface s' correspondra à une ordonnée z' représentée par OL. L'équation (432) donnera, dans cette hypothèse,

$$C = \Pi - \rho\left(gz' - \frac{k^2 u^2}{2s'^2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (432), on obtiendra

$$p = \Pi + \rho\left[g(z - z') - \frac{kdu}{dt}\int \frac{dz}{s} + \tfrac{1}{2}u^2\left(\frac{k^2}{s'^2} - \frac{k^2}{s^2}\right)\right] \ldots (433).$$

613. Cette pression est exercée sur le point quelconque du vase dont la distance au plan AB est z. Si l'on veut avoir celle qui a lieu à l'orifice, désignons-la par Ω; et comme dans ce cas z reçoit une valeur déterminée Oh, que nous représenterons par z'' et pour laquelle s devient k, il faudra prendre l'intégrale entre les limites $z = z'$ et $z = z''$; appelant N cette intégrale, et substituant ces valeurs dans l'équation (433), nous obtiendrons

$$\Omega - \Pi = \rho\left[g(z'' - z') - kN\frac{du}{dt} + \tfrac{1}{2}u^2\left(\frac{k^2}{s'^2} - 1\right)\right].$$

614. Cette équation donnera la valeur de la pression Ω à l'orifice; le premier membre exprime la différence des pressions à l'orifice et au niveau de l'eau. Supposons que ces pressions soient égales, comme cela a lieu lorsqu'elles sont exercées seulement par le poids de l'atmosphère, $\Omega - \Pi$ se

réduit à zéro, le facteur commun ρ s'évanouit, et il reste,

$$g(z''-z')-k\mathrm{N}\frac{du}{dt}+\tfrac{1}{2}u^2\left(\frac{k^2}{s'^2}-1\right)=0;$$

et comme la surface supérieure s' est plus grande que la surface k de l'orifice, la fraction $\frac{k^2}{s'^2}$ sera moindre que l'unité; par conséquent, pour que la quantité qui est multipliée par $\frac{1}{2}u^2$ représente une quantité positive, nous écrirons ainsi l'équation précédente,

$$g(z''-z')-k\mathrm{N}\frac{du}{dt}-\tfrac{1}{2}u^2\left(1-\frac{k^2}{s'^2}\right)=0\ldots(434).$$

615. On peut introduire, dans cette équation, la distance verticale de l'orifice au niveau MN, en faisant

$$z''-z'=h\ldots(435),$$

et alors elle devient

$$gh-k\mathrm{N}\frac{du}{dt}-\tfrac{1}{2}u^2\left(1-\frac{k^2}{s'^2}\right)=0\ldots(436).$$

616. La quantité h, qui entre dans cette équation, représentant la distance EP (fig. 250) de l'orifice au niveau de l'eau MN, h est constant lorsque le fluide, réparant ses pertes, se maintient toujours à la même hauteur; mais h est variable lorsque le niveau de l'eau s'abaissant par degrés, le vase se vide entièrement. Fig. 250.

617. Dans ce dernier cas, on voit que le niveau MN se rapprochant de E, les abscisses EP$=h$ se comptent du point E, tandis que le temps se compte du point O. Pour éviter cet inconvénient d'avoir deux origines, et afin que le temps ne se détermine pas négativement, nous prendrons pour abscisse, non EP $=h$, mais OP $=z$; dans ce cas, il suffira d'employer l'équat. (434), en regardant z' comme variable et z'' comme constant, car alors z'', qui exprime la distance du niveau pri-

Fig. 250. mitif au point E, sera constant, tandis que la distance OP, représentée par z', variera continuellement. Faisons EO $= a$, PO $= z$, et EP $= h$, nous aurons la relation

$$h = a - z \ldots (437),$$

et l'équation (436) deviendra

$$g(a-z) - h\text{N}\frac{du}{dt} - \tfrac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{k^2}{s'^2}\right) = 0 \ldots (438).$$

618. Lorsque le niveau du fluide reste toujours à la même hauteur, h est constant. Il en est de même de l'intégrale N, qui devient alors une fonction de constantes, puisqu'on y remplace les variables par des valeurs déterminées; l'équation (436) peut alors s'employer sans que l'on ait à craindre l'inconvénient dont on a parlé art. 617, et comme, à part t et u, elle ne renferme, dans notre hypothèse, que des constantes, on peut la mettre sous cette forme

$$a - b\frac{du}{dt} - cu^2 = 0;$$

on en tire

$$at = \frac{bdu}{a - cu^2}.$$

Cette équation s'intègre facilement par la méthode des fractions rationnelles. En effet, en supposant $b = b'c$ et $a = a'^2c$, c devient facteur commun, et en le supprimant il reste

$$dt = \frac{b'du}{a'^2 - u^2},$$

équation qui se décompose ainsi (*Élémens de Calcul différentiel*, art. 295):

$$dt = \frac{\frac{b'}{2a'}\,du}{a' + u} + \frac{\frac{b'}{2a'}\,du}{a' - u},$$

et qui, intégrée par logarithmes, donne

$$t = \frac{b'}{2a'} \log(a' + u) - \frac{b'}{2a'} \log(a' - u),$$

ou

$$t = \frac{b'}{2a'} \log\left(\frac{a' + u}{a' - u}\right) + C.$$

La constante se détermine en supposant que la vitesse du fluide soit nulle à l'origine du temps, ou, ce qui revient au même, que le fluide parte du repos; car alors $u = 0$ et $t = 0$ réduisent l'équation précédente à

$$\frac{b'}{2a'} \log 1 + C = 0,$$

c'est-à-dire à

$$C = 0.$$

Supprimant donc la constante, il restera

$$t = \frac{b'}{2a'} \log \frac{a' + u}{a' - u}:$$

cette équation déterminera la vitesse u lorsque le temps sera donné.

Quand on aura ainsi trouvé la vitesse, on en mettra la valeur dans l'équation (432), pour avoir la pression sur l'unité de surface.

619. Dans le cas où le vase se vide successivement, le niveau de l'eau s'abaisse à mesure que l'eau s'écoule, et il faut regarder la quantité h, qui entre dans l'équation (436), comme variable; mais nous avons vu que, dans ce cas, art. 617, il valait mieux employer l'équation (438), qui, par z employé au lieu de h, évite l'inconvénient que t soit négatif.

Nous avons donc trois variables, t, u et z; par conséquent, cette équation ne suffit pas pour la solution du problème : nous nous en procurerons une seconde en ayant recours à l'équation (427), dans laquelle nous changerons s en s', puisque

s est la surface du niveau, et nous aurons

$$ku = s'\frac{dz}{dt} \ldots \quad (439).$$

620. Cette équation renfermant encore trois variables, nous ne pourrons immédiatement l'intégrer, mais elle nous servira à éliminer z. Pour cet effet, nous remarquerons que puisqu'elle ne contient que le coefficient différentiel $\frac{dz}{dt}$, nous pourrons obtenir une équation qui sera du même ordre en z, si nous différentions l'équation (438), ce qui nous donnera

$$-g\frac{dz}{dt} - kN\frac{d^2u}{dt^2} - u\frac{du}{dt}\left(1 - \frac{k^2}{s'^2}\right) = 0;$$

par conséquent, en éliminant $\frac{dz}{dt}$, nous aurons

$$-g\frac{ku}{s'} - kN\frac{d^2u}{dt^2} - u\frac{du}{dt}\left(1 - \frac{k^2}{s'^2}\right) = 0.$$

Cette équation du second ordre donne la relation qui existe entre le temps et la vitesse, et n'est intégrable que par des moyens approximatifs.

621. Lorsque l'orifice est très petit, on peut regarder les termes affectés de k comme nuls; cette hypothèse réduit l'équation (433) à

$$p = \Pi + g(z - z');$$

Fig. 249. et comme $z - z'$ est représenté (fig. 249) par $On - nL$, c'est-à-dire par nL, on voit que $z - z'$ n'est autre chose que la distance dont le point n, qui a z pour ordonnée, est éloigné du niveau de l'eau. Donc la pression p, qui a lieu sur l'unité de surface d'un point n, est égale à la pression Π qui est exercée au niveau de l'eau, plus à la pression d'une colonne d'eau mesurée par la distance de ce point au niveau du fluide.

622. Il est à remarquer que cette pression ne diffère pas de celle que supporterait le point n si le fluide était en repos.

Si l'on supprime de même les termes affectés de k dans l'équation (436), on la réduira à

$$gh - \frac{1}{2}u^2 = 0;$$

et l'on en déduira

$$u = \sqrt{2gh} \ldots (440).$$

Ce qui nous apprend que lorsque l'eau s'échappe par un petit orifice, la vitesse qu'elle acquiert est celle qui est due au niveau de l'eau; et comme on a vu, art. 316, qu'un mobile qui est lancé de bas en haut doit en tombant (abstraction faite de la résistance des milieux) remonter à la hauteur de laquelle il est parti, il s'ensuit que si, à l'aide d'un tuyau, on change le sens de la direction du fluide, il remontera, à l'instant de sa chute, à la hauteur qu'il avait avant d'avoir été mis en mouvement.

623. La vitesse, au lieu d'être verticale, deviendra horizontale lorsque l'orifice, que nous supposons toujours très petit, sera vertical. Si l'on veut connaître la courbe qu'en ce cas le fluide décrit dans le vide, l'angle qu'on a désigné par α, art. 420, étant nul, on aura tang $\alpha = 0$, cos $\alpha = 1$, et la formule 293 se réduira à

$$4hy = x^2,$$

ce qui est l'équation d'une parabole dont l'axe se trouve dans une position verticale.

624. La vitesse u peut servir à trouver la masse d'eau qui s'est écoulée dans le temps t, et qu'on appelle la dépense du réservoir. Pour cela, il faut remarquer qu'il n'a pu sortir de l'eau de ce réservoir que parce que la tranche du fluide qui était en CD (fig. 250) vient en un lieu plus bas MN. Or, pour Fig. 250.
que cela soit possible, il faut qu'il soit sorti du vase une quantité d'eau égale à la somme des tranches comprises entre CD et

MN. Cet espace formera un volume qu'il est facile d'évaluer. En effet, en représentant par s la tranche élémentaire, et par dz sa hauteur, l'intégrale $\int sdz$ prise entre les limites CD et MN, sera donc égale à la somme de toutes ces tranches, et par conséquent équivaudra au volume du fluide qui s'est écoulé. Désignons par Q la dépense d'eau; on aura donc

$$Q = \int sdz \ldots (441);$$

mais l'équation (427) nous donne

$$sdz = kudt.$$

Substituant cette valeur dans celle de Q, nous obtiendrons

$$Q = \int kudt.$$

Cette valeur de la dépense d'eau peut se déduire immédiatement de celle de la vitesse, car cette vitesse nous fournit le moyen de trouver l'espace parcouru dans l'instant dt. En effet, en nommant de cet espace, nous avons

$$udt = de;$$

il ne s'agit donc plus que de multiplier udt par k pour avoir le volume du petit filet qui s'est écoulé dans l'instant dt, et qui par conséquent aura pour expression $kudt$. Prenant l'intégrale, nous aurons donc $\int kudt$ pour l'eau qui s'est écoulée dans le temps t.

Nous effectuerons l'intégration après avoir remplacé u par sa valeur $\sqrt{2gh}$ tirée de l'équat. 440, et nous trouverons

$$Q = k\sqrt{2g}\int\sqrt{h}\,.dt \ldots (442).$$

625. Il se présente ici deux cas, savoir : h constant et h variable; le premier a lieu lorsque l'eau est constamment maintenue à la même hauteur. L'équation précédente s'intègre alors facilement, car la hauteur h du niveau au-dessus de l'orifice

étant remplacée par une constante a, nous aurons en intégrant

$$Q = kt\sqrt{2ga} + C.$$

Nous déterminerons la constante par l'hypothèse qu'à l'origine du temps la quantité Q d'eau écoulée soit nulle, ce qui nous donnera

$$C = 0;$$

et l'équation précédente se réduira à

$$Q = k\sqrt{2g}.t\sqrt{a} \dots (443).$$

626. Si le petit orifice k est un cercle dont le rayon soit r, et qu'on désigne par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, on aura

$$k = \pi r^2,$$

et par conséquent la formule (443) deviendra

$$Q = \pi\sqrt{2g}.tr^2\sqrt{a} \dots (444).$$

Nous écrivons en premier lieu la quantité $\pi\sqrt{2g}$, qui est la même pour tous les problèmes, et que l'on déduira facilement des valeurs suivantes, art. 384 :

$$\pi = 3,14159, \quad g = 9^m,80867, \quad \text{ou} \quad 30^{pi},19546;$$

on mettra ensuite dans la formule (444) les valeurs de r, de t et de a, qui conviennent au cas particulier que l'on examine. Le diamètre de l'orifice peut être exprimé en décimètres, et la hauteur du fluide en mètres; et l'on sent qu'il faut alors tout réduire en mètres ou en décimètres, pour n'employer que la même unité linéaire.

627. Nous ferons une observation analogue sur l'unité de temps, qui, étant tacitement adoptée, exige que nous réduisions le temps en secondes. En effet, lorsque nous avons traité du mouvement varié, nous avons déterminé g en prenant la seconde de temps pour unité; c'est un facteur qui entre

dans la valeur de g, et que nous avons fait disparaître, art. 304, lorsque nous avons supposé $t = 1$ dans l'équation (157); rétablissant ce facteur, nous aurons

$$g = \frac{30,19546}{(1'')^2};$$

par conséquent la valeur de t qui entre dans notre formule revient à

$$\frac{t}{\textit{une seconde de temps}},$$

quantité qui n'est qu'un nombre abstrait. Voilà pourquoi h seul détermine la nature des unités de notre formule.

628. Lorsque l'on aura trouvé la valeur de Q en décimètres cubes, comme le décimètre cube pèse un kilogramme, on aura donc le poids du volume d'eau exprimé en kilogrammes; mais si l'on opérait à l'aide des anciennes mesures, il faudrait, pour évaluer le poids du volume d'eau, réduire en livres le nombre de pieds cubes qu'il exprime, et pour cela, il suffirait de multiplier le nombre de pieds cubes obtenus par 70, valeur des livres d'un pied cube d'eau.

629. La formule 444 nous fournit le moyen de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de trouver le temps de l'écoulement d'un fluide qui se maintient toujours à la même hauteur; car cette formule nous donne

$$t = \frac{Q}{\pi\sqrt{2g}.r^2\sqrt{a}} \ldots \quad (445).$$

630. Pour en donner une application, supposons que le vase, maintenu toujours plein, soit un cylindre droit qui ait b pour rayon de sa base, et qu'on demande en quel temps l'eau écoulée sera de même volume que celle qui est renfermée dans le vase.

Dans ce cas, toutes les sections horizontales étant égales à

πb^2, l'équation (441) donnera

$$Q = \int \pi b^2 dz,$$

et par conséquent

$$Q = \pi b^2 z + C;$$

et en prenant l'intégrale depuis l'orifice jusqu'au niveau, il faudra remplacer z par a, et l'on trouvera

$$Q = \pi a b^2.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (445), on obtiendra

$$t = \frac{\pi a b^2}{\pi \sqrt{2g} . r^2 \sqrt{a}};$$

ou, en réduisant,

$$t = \frac{b^2 \sqrt{a}}{r^2 \sqrt{2g}}.$$

631. Si l'on suppose un second vase qui, ainsi que le premier, se maintienne toujours plein, et qu'on nomme Q' sa dépense d'eau, k' son orifice et a' la hauteur de son niveau au-dessus de l'orifice, l'équation (443) nous donnera pour ce cas

$$Q' = k' \sqrt{2g} . t \sqrt{a'}.$$

Si l'on compare ensuite la même équation (443) à cette dernière, on établira la proportion

$$Q : Q' :: k \sqrt{a} . t \sqrt{2g} : k' \sqrt{a'} . t \sqrt{2g};$$

et en supprimant le facteur commun, cette proportion deviendra

$$Q : Q' :: k \sqrt{a} : k' \sqrt{a'}.$$

Ce qui nous montre que lorsque les orifices k et k' ont la même ouverture, les dépenses d'eau sont comme les racines carrées des hauteurs.

632. L'équation (443) va nous conduire à un autre théorème. Pour cela, nommons h la hauteur de laquelle tombe un

mobile dans le temps t, nous aurons

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

d'où nous tirerons

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

mettant cette valeur dans l'équation (443), nous obtiendrons

$$Q = 2k\sqrt{ah}.$$

Or, $\sqrt{ah}$ étant une moyenne proportionnelle entre a et h, cela nous apprend que la dépense d'eau est égale au double du volume d'un cylindre dont la hauteur serait une moyenne proportionnelle entre la hauteur du niveau et la hauteur de laquelle un corps grâve descend dans le temps t.

633. Considérons maintenant h comme variable. Dans ce cas, ayant égard à l'observation de l'article 617, on remplacera h par $a - z$ dans l'équation (440), ce qui donnera

$$u = \sqrt{2g(a-z)};$$

et en substituant cette valeur de u dans l'équation (439), on en tirera

$$dt = \frac{s'dz}{k\sqrt{2g(a-z)}},$$

ou, en décomposant le radical en deux facteurs,

$$dt = \frac{s'dz}{k\sqrt{2g}\sqrt{a-z}} \ldots \quad (446).$$

La quantité s' qui entre dans cette équation représente la surface de niveau qui s'abaisse à mesure que la variable z augmente. C'est une fonction de z, qu'on doit éliminer au moyen de l'équation de la surface interne du vase; autrement nous aurions trois variables dans nôtre équation, et l'intégration deviendrait impraticable. Quand on aura donc substitué

la valeur de s' et intégré, on connaîtra z en fonction de t ; et si l'on retranche de a cette valeur de z, on aura celle de h qu'on substituera dans la formule (442), et en effectuant une nouvelle intégration, on obtiendra la dépense Q du réservoir.

634. Prenons pour exemple un vase dont la surface interne serait celle d'un paraboloïde de révolution. Cette surface étant engendrée par la rotation de l'arc de parabole AD (fig. 251) autour de l'axe AB, si l'on nomme a la distance AB de l'orifice au niveau primitif, il y aura entre l'abscisse $PB = z$ et l'ordonnée $PM = y$ la relation Fig. 251.

$y^2 = p(a - z)$, *équat. de la parab. rapportée à l'origine* B.

Donc, en représentant par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, le cercle décrit par PM ayant pour expression πy^2, équivaudra à $\pi p(a - z)$; par conséquent nous aurons

$$s' = \pi p(a - z) \dots (447).$$

Mettant cette valeur dans l'équation (446), il nous faudra intégrer celle-ci

$$dt = \frac{\pi p}{k\sqrt{2g}} \frac{(a - z)}{\sqrt{a - z}} dz,$$

ou, en réduisant,

$$dt = \frac{\pi p}{k\sqrt{2g}} (a - z)^{\frac{1}{2}} dz.$$

635. Pour parvenir à intégrer cette équation, comme dz est, au signe près, la différentielle de la quantité qui est comprise entre les parenthèses, nous supposerons (*Élém. de Calcul intégral*, art. 271) $a - z = x$, ce qui nous donnera

$$\int (a - z)^{\frac{1}{2}} dz = -\int x^{\frac{1}{2}} dx = -\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

remettant pour x sa valeur, on aura donc

$$\int (a - z)^{\frac{1}{2}} dz = -\tfrac{2}{3}(a - z)^{\frac{3}{2}} + C,$$

et par conséquent

$$t = -\tfrac{2}{3}\frac{\pi p}{k\sqrt{2g}}(a-z)^{\frac{3}{2}} + C\ldots\ (448);$$

on détermine la constante C en supposant que t soit nul à l'origine des z, car alors en faisant $z=0$ et $t=0$, dans l'équation (448), on obtient

$$C = \tfrac{2}{3}\frac{\pi p a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{2g}};$$

mettant cette valeur dans l'équation (448), nous aurons enfin

$$t = \tfrac{2}{3}\frac{\pi p}{k\sqrt{2g}}\left[a^{\frac{3}{2}} - (a-z)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Pour connaître maintenant la dépense d'eau, nous tirerons d'abord de cette équation

$$a - z = \left(a^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}\frac{k\sqrt{2g}}{\pi p}.t\right)^{\frac{2}{3}};$$

cette valeur étant introduite à la place de h dans l'équation (442), la convertira en

$$Q = k\sqrt{2g}\int\left(a^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}\frac{k\sqrt{2g}}{\pi p}.t\right)^{\frac{1}{3}} dt.$$

Cette équation s'intégrant par le même procédé que nous avons employé dans cet article, nous ne nous y arrêterons pas.

636. Cherchons encore le temps de l'écoulement d'un vase dont la surface interne serait celle d'un cylindre droit, et qui se viderait sans réparer ses pertes. Soit b le rayon de la section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe, nous aurons $s' = \pi b^2$, et l'équat. (446) nous donnera

$$t = \frac{\pi b^2}{k\sqrt{2g}}\int\frac{dz}{\sqrt{a-z}}.$$

Faisant encore $a - z = h$, intégrant l'équation transformée, et remettant ensuite la valeur de h, nous trouverons

$$t = -\frac{2\pi b^2}{k\sqrt{2g}}\sqrt{a-z} + C;$$

déterminant la constante par la supposition que z et t soient nuls en même temps, on a enfin

$$t = \frac{2\pi b^2}{k\sqrt{2g}}(\sqrt{a} - \sqrt{a-z}) \ldots \quad (449).$$

Prenant l'intégrale depuis le point où $z = 0$ jusqu'à celui où $z = a$, on a pour l'écoulement total

$$t = \frac{2\pi b^2}{k\sqrt{2g}}\sqrt{a} \ldots \quad (450).$$

Si l'on suppose, comme dans l'art. 626, que l'orifice soit un cercle qui ait r pour rayon, on aura $k = \pi r^2$; cette valeur réduit l'équation (450) à

$$t = \frac{2b^2}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{r^2}.$$

En comparant cette valeur à celle que l'on a obtenue, article 629, on voit que, dans l'hypothèse actuelle, le vase demeure le double de temps à s'écouler.

637. Les formules (449) et (450) peuvent servir à construire une clepsydre ou horloge d'eau. Pour cet effet, lorsque l'on aura déterminé la longueur du temps, par exemple, 12 heures, on réduira ce temps en secondes; ce qui donnera $12(60)^2$ ou 123 600 secondes; et, en substituant cette valeur de t dans la formule (450), nous pourrons disposer arbitrairement de trois des quantités k, b et a. Supposons donc que les deux premières soient données, la formule (450) déterminera alors la hauteur a de la clepsydre; il ne s'agira plus que de diviser convenablement cette hauteur. Pour cela, on tirera de la for-

mule (449)

$$a - z = \left(\sqrt{a} - \frac{kt\sqrt{2g}}{2\pi b^2}\right)^2;$$

et en donnant à z les valeurs successives 1, 2, 3, etc., on aura les valeurs qui correspondront à 11, à 10, à 9 heures, etc., et qui devront être comptées depuis l'orifice. Il n'est pas besoin d'avertir qu'il peut y avoir des clepsydres de toutes les formes.

638. Il est utile d'observer que lorsqu'on sera arrivé à la dernière division, à partir de haut en bas, l'entonnoir dont nous avons parlé, art. 604, pourra influer sur les résultats; c'est pourquoi il est convenable de ne faire usage que des onze premières divisions.

639. En général, les conditions du parallélisme des tranches et de l'égalité de vitesse des molécules d'une même tranche, cessent d'être observées lorsqu'on s'approche d'environ quatre ou cinq pouces d'un orifice horizontal. C'est alors que les molécules du fluide prennent des directions plus ou moins inclinées, et que l'espèce d'entonnoir dont nous avons parlé, art. 604, se forme. Lorsque le niveau du fluide est à une grande distance de l'orifice, ce niveau paraît sensiblement horizontal; et si l'entonnoir ne paraît pas, c'est que la vitesse étant d'autant plus grande que la colonne d'eau est élevée, cette vitesse est cause que les molécules du fluide, qui d'ailleurs se succèdent immédiatement, remplissent de suite le vide qui a lieu.

Cet entonnoir est beaucoup moins apparent, ou plutôt ne se forme qu'à demi dans les orifices latéraux; encore faut-il que le niveau de l'eau soit parvenu à peu près à fleur de l'orifice. C'est alors que ce niveau perd un peu sa direction horizontale, pour s'enfoncer légèrement du côté de l'orifice.

Cette tendance des particules aqueuses vers l'orifice, du côté duquel elles éprouvent une moindre pression, est cause que le jet se rétrécit par degrés en sortant de l'orifice, et prend la

forme d'une pyramide ou cône tronqué, dont la plus grande base se trouve à l'orifice. C'est ce qu'on appelle la contraction de la veine fluide.

Dans un orifice circulaire, la section de la plus grande contraction, c'est-à-dire la plus petite section de la veine fluide, est distante de l'orifice d'environ un demi-diamètre de cet orifice.

640. La contraction de la veine fluide existe aussi bien lorsque l'orifice est latéral que lorsqu'il est horizontal; mais il y a cette différence, que, dans ce dernier cas, la veine fluide conserve la même grosseur dans toute sa longueur, tandis que, lorsque l'ouverture est latérale, cela n'a lieu que dans un orifice très petit. Il résulte de cette observation que si l'on pouvait mesurer parfaitement la section perpendiculaire à la veine contractée, on pourrait regarder cette section comme le véritable orifice. S'il est difficile de l'évaluer avec exactitude, du moins est-il constant que la formule donnée par l'expérience ne diffère de celle que la théorie a trouvée que par la valeur de k. Ainsi, en représentant par Mk l'orifice déterminé par l'expérience, on doit avoir pour la dépense effective d'un petit orifice,

$$Q = Mk\sqrt{2g}.t\sqrt{a},$$

au lieu de

$$Q = k\sqrt{2g}.t\sqrt{a}.$$

641. L'expérience a aussi prouvé que ce nombre M était le même pour deux petits orifices percés dans de minces parois. En effet, en désignant par Q', par k' et par a' la dépense, l'orifice et la hauteur d'un second orifice de ce genre, on aurait, dans cette hypothèse,

$$Q : Q' :: Mk\sqrt{2g}.t\sqrt{a} : Mk'\sqrt{2g}.t\sqrt{a'},$$

proportion de laquelle on conclurait que les dépenses effectives des deux orifices sont entre elles comme les produits $k\sqrt{a}$ et $k'\sqrt{a'}$ des aires des orifices par les racines carrées des

hauteurs : c'est aussi ce que confirme l'observation, qui, en ce point, s'accorde avec la théorie.

642. L'abbé Bossut a trouvé que ce nombre M était à peu près de $\frac{5}{8}$, ou, plus exactement, de $\frac{62}{100}$. C'est par cette fraction qu'il faut multiplier la constante k, pour que le résultat donné par le calcul soit celui qu'avoue l'expérience. Ainsi la dépense trouvée par le calcul pour un vase toujours plein étant, d'après l'équation qui est à la fin de l'article 623,

$$Q = k\sqrt{2g}.t\sqrt{a},$$

la dépense corrigée, ou celle que donne l'expérience, sera

$$Q = (0,62)\, k\sqrt{2g}.t\sqrt{a},$$

ou plutôt

$$Q = (4,818)\, kt\sqrt{a},$$

en remplaçant $\sqrt{2g}$ par sa valeur.

Cette formule est encore applicable aux petits orifices latéraux.

A l'égard d'un vase qui se vide graduellement, on ne peut rien statuer aux approches de l'orifice; mais si l'on ne mesure la dépense d'eau que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de l'orifice, la même correction pourra s'appliquer à la formule (446), qui deviendra

$$dt = \frac{s'dz}{(0,62)\, k\sqrt{2g}\sqrt{a-z}},$$

et à l'aide de laquelle on déterminera, comme on l'a vu, le temps et ensuite la dépense d'eau.

643. Jusqu'à présent, dans ce qui concerne ces corrections, nous avons supposé que les orifices ne pénétraient que de minces parois, parce c'est encore un fait appuyé sur l'expérience, que de deux orifices qui répondent à des hauteurs égales, celui qui a le moins d'épaisseur fournit la dépense la plus grande.

Voilà pourquoi lorsque l'eau sort par des tuyaux additionnels, la correction que nous avons fait connaître pour de minces orifices n'est plus applicable ici. Un tuyau de ce genre est ordinairement très court, comme de deux à trois pouces; mais il faut que l'eau coule sur ses parois avant que de sortir, autrement on tomberait dans le cas des orifices ordinaires. Or, pour que l'eau puisse couler de la sorte, il faut, suivant l'abbé Bossut, que le tuyau ait au moins une longueur double de celle de son diamètre. Le même géomètre a reconnu que lorsque l'eau sort à plein tuyau, ou, suivant l'expression technique, *à gueule bée*, la contraction de la veine fluide avait toujours lieu à l'entrée du tuyau, et non à sa sortie où l'eau prend une forme cylindrique.

Cette contraction est assez forte pour augmenter beaucoup la dépense d'eau, malgré les effets du frottement.

Au reste, on a encore observé, dans les tuyaux de ce genre, que les dépenses d'eau étaient encore proportionnelles aux produits des orifices par les hauteurs correspondantes; mais, d'après ce que nous venons de dire que la dépense d'eau de ce tuyau est plus forte, on conçoit que le nombre M ne peut plus être le même. L'abbé Bossut a encore reconnu que pour ces tuyaux additionnels le nombre M était égal à $\frac{13}{16}$, ou, plus exactement, à environ $\frac{81}{100}$. Ainsi la formule (443) qui a lieu pour évaluer la dépense d'eau d'un réservoir toujours plein, étant corrigée pour des tuyaux additionnels, deviendra

$$Q = (0,81)\sqrt{2g}.kt\sqrt{a};$$

et comme ces tuyaux sont ordinairement cylindriques, ils ont un cercle pour section. Nommant r le rayon de ce cercle, k pourra être remplacé par πr^2, et si l'on calcule la valeur de la constante $(0,81)\pi\sqrt{2g}$, on trouvera

$$Q = (4,9438)\, r^2 t\sqrt{a}.$$

A l'égard d'un vase qui se vide, on agira comme nous l'avons fait pour les orifices pratiqués dans de minces parois.

Équations générales du mouvement des fluides.

644. Soient x, y, z trois coordonnées rectangulaires qui, en prenant des valeurs particulières, déterminent tous les points d'une masse de fluide. Si cette masse est en mouvement, les valeurs qui se rapportent à un même point doivent changer continuellement; de sorte que la position de ce point doit dépendre des quatre variables x, y, z et t. Si l'on savait quelle est cette position à l'expiration du temps t, et qu'on eût le moyen de déterminer la vitesse V du point donné en fonction des quatre variables x, y, z et t, cette vitesse serait connue. Il en serait de même de la densité ρ du fluide en ce lieu, et de la pression p qui pourrait être communiquée au point x, y, z par diverses forces accélératrices.

645. Les quantités V, p et ρ seront donc les inconnues du problème, et devront se déterminer en fonction des coordonnées x, y, z et du temps t; mais à l'égard de V, il est à observer que l'intensité V de la vitesse ne suffit pas, et qu'il est nécessaire d'en avoir la direction, ce qui exige encore que l'on connaisse les angles θ et θ' que cette direction fait avec des parallèles à deux des axes coordonnés. Il faudra donc ajouter ces deux nouvelles inconnues au problème; mais au lieu des trois variables V, θ et θ', nous pourrons prendre les composantes u, v, w de la vitesse parallèlement aux trois axes coordonnés. Ainsi, le problème général dont nous cherchons la solution comporte ces cinq inconnues, p, ρ, u, v, w, et par conséquent nécessite cinq équations pour les déterminer. Il nous sera donc permis de traiter p, ρ, u, v, w comme des quantités entièrement connues, pourvu que nous parvenions à établir ces cinq équations. Nous allons d'abord voir comment les composantes u, v, w de la vitesse peuvent déterminer l'expression de cette vitesse ainsi que sa direction. Pour cela, soit M un point fluide considéré à l'expiration du temps t, et x, y, z les coordonnées de ce point à cette même époque, les composantes u, v et w de la vitesse de ce point étant multipliées par le temps infiniment petit dt qui succèdera à t, donneront les produits udt, vdt, wdt pour les espaces parcourus dans le temps dt; car on doit se rappeler que l'espace est égal au produit du temps par la vitesse. Au moyen de ces composantes, on trouvera pour l'espace MM' (fig. 252) parcouru par le point M dans l'instant dt, art. 46 et 327,

Fig. 252.

$$MM' = \sqrt{u^2dt^2 + v^2dt^2 + w^2dt^2},$$

ou, en mettant le facteur commun dt en dehors du radical,

$$MM' = dt\sqrt{u^2+v^2+w^2} \ldots \quad (451);$$

et comme l'espace parcouru MM' divisé par dt est égal à la vitesse, on voit que le radical de l'équation (451) n'est autre chose que cette vitesse, que nous avons désignée ci-dessus par V, ce qui est d'ailleurs évident puisque u, v, w en sont les trois projections.

Pour en déterminer la position, soient θ, θ' et θ'' les angles que MM' fait avec les axes coordonnés; si nous divisons les espaces parcourus udt, vdt, wdt, par MM', nous obtiendrons, après avoir supprimé le facteur commun dt, aux deux termes de chaque fraction,

$$\cos\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \cos\theta' = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$
$$\cos\theta'' = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

646. Mais tandis que le point fluide M est transporté de M en M' dans l'instant dt, voyons ce que devient, dans le même instant, un petit parallélépipède rectangle dont les dimensions seraient dx, dy et dz, et que l'on doit considérer comme l'élément de la masse fluide. Pour cela, prenons deux points fluides infiniment proches, et qui correspondent aux coordonnées x, y, z et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et désignons ces points par (M) et par (m), en mettant ainsi des parenthèses pour distinguer les points fluides de ceux de l'espace représentés, dans la figure 253, par les mêmes lettres M et m; et soient M' et m' les lieux où (M) et (m) seront transportés au bout du temps dt. Ces points (M) et (m) étant séparés par un certain espace linéaire, cet espace est occupé par des particules fluides; et, comme il y a continuité dans le fluide, ces particules se touchent toutes, mais sont susceptibles de s'étendre plus ou moins dans un sens, selon les dimensions que prendra notre parallélépipède au bout du temps $t+dt$. Cela posé, les points fluides (M) et (m) se trouvant en M et en m avant que le temps dt ait commencé, il suffit pour passer de l'un à l'autre, de supposer que les coordonnées x, y, z deviennent $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; alors les composantes rectangulaires de la vitesse qui animeront (m) à l'expiration de t, au lieu d'être les fonctions u, v et w des coordonnées x, y, z, deviendront des fonctions des coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Les composantes u, v et w recevront donc en m des accroissemens que nous allons déterminer; mais auparavant nous ferons remarquer que ces composantes de la vitesse étant indépendantes les unes des autres, art. 329, il en doit être de même des espaces parcourus qui sont les produits de ces vitesses par dt.

Fig. 253.

647. On est donc fondé à considérer séparément les trois coordonnées du point m' qui représentent ces espaces parcourus. Ainsi, en commençant par celle qui est dans le sens des x, et en prenant pour origine le
Fig. 254. point M (fig. 254), on voit que cette coordonnée se compose, 1° de la distance dx qui sépare, sur l'axe des x, les projections des points M et m; 2° du chemin que décrira la projection du point (m) en vertu de la vitesse acquise à l'expiration de t, vitesse qui amènera ce point (m) de m en m', et sa projection (n) de n en n'. Or, la composante de la vitesse du point (M) dans le sens des x étant u, elle deviendra

$$u + \frac{du}{dx}dx + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dw}{dx}dx\ldots \quad (452)$$

lorsqu'on passera du point (M) au point (m), dont la coordonnée, dans le sens des x, est plus longue de dx que celle de (M). En considérant d'abord le premier terme u de l'expression (452), ce terme nous indique dans (m) une vitesse qui, dirigée suivant l'axe des x, est égale à celle qui anime (M) suivant le même axe.

Il suit de là que, dans l'instant dt, la projection (n) parcourt sur l'axe des x, en vertu de cette seule vitesse, un espace udt égal au chemin NN′ décrit par la projection (N) du point (M) sur le même axe; et en représentant par nP (fig. 254) ce chemin parcouru par la projection (n), on a donc

$$nP = NN';$$

et en retranchant la partie commune nN', il reste

$$N'P = Nn = dx;$$

mais la projection (n) du point (m) arrivée en P, doit continuer à se mouvoir en vertu des vitesses $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{dv}{dx}dx$, $\frac{dw}{dx}dx$, et parcourir les espaces que mesureront les produits de ces vitesses par l'élément de temps dt. Le premier de ces espaces sera donc $\frac{du}{dx}dx.dt$, et transportera notre projection (n) de P en Q, toujours sur la direction de l'axe des x; mais la vitesse $\frac{dv}{dx}dx$ qui agit parallèlement à l'axe des y, sortira notre point mobile qui est en Q de la direction de l'axe des x, et lui fera décrire une petite ligne QR parallèle à l'axe des y, et égale à $\frac{dy}{dx}dx.dt$. Enfin, notre point de projection arrivé en R changera encore de direc-

tion, et décrira une ligne Rn' parallèle à l'axe des z, et égale à

$$\frac{dw}{dx}\,dx.dt\ (*).$$

648. Il suit de ce qui précède que quand (m) sera en m', la projection de (m) dans le sens de l'axe des x sera parvenue en n'. Par conséquent, dans l'intervalle de temps dt, les projections de (M) et de (m) dans le sens des x, auront pris les positions N' et n'. La distance de ces deux points est évidemment la diagonale d'un parallélépipède rectangle (fig. 255) dont N'Q, QR et Rn' seraient les trois arêtes; cette distance aura donc pour expression Fig. 255.

$$\sqrt{(N'P + PQ)^2 + QR^2 + Rn'^2} \ldots (453);$$

à l'égard des valeurs des lignes qui entrent sous ce radical, nous avons évidemment, d'après la théorie que nous venons d'établir,

$$N'P = udt = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad PQ = \frac{du}{dx}\,dx.dt,$$

$$N'P + PQ = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dx}\,dx\right)dt = dx\left(1 + \frac{du}{dx}\,dt\right);$$

$$QR = \frac{dv}{dx}\,dx.dt, \quad Rn' = \frac{dw}{dx}\,dx.dt.$$

Mettant ces valeurs dans l'expression (453), et faisant passer le facteur commun dx^2 en dehors du signe radical, on aura pour la coordonnée de Mm' dans le sens des x,

$$dx\sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\,dt\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dt^2} \ldots (454).$$

On voit que cette coordonnée formant un angle $QN'n'$ (**) avec cet axe, en quitte un peu la direction.

En cherchant par le même procédé les composantes de Mm' dans le sens de l'axe des y et de l'axe des z, on trouverait que ces composantes

---

(*) Nous avons pris les chemins décrits, à partir de P, par le point de projection dans cet ordre :

$$\frac{du}{dx}\,dx.dt, \quad \frac{dv}{dx}\,dx.dt, \quad \frac{dw}{dx}\,dx.dt;$$

mais si l'on eût placé ces espaces dans un ordre différent, on serait parvenu, par une autre construction, au même point n'.

(**) Il n'est pas inutile de faire observer que l'angle $n'N'Q$ est infini-

sont respectivement

$$dy\sqrt{\left(1+\frac{dv}{dy}dt\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2dt^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2dt^2} \dots (455),$$

$$dz\sqrt{\left(1+\frac{dw}{dz}dt\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2dt^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2dt^2}, \dots (456),$$

et qu'elles s'écartent un peu de la direction des axes primitifs. Par conséquent, les trois côtés de notre parallélépipède changent un peu d'inclinaison : ce parallélépipède, de rectangle qu'il était avant le temps dt, devient donc obliquangle quand ce temps s'est écoulé.

649. Mais pour pouvoir affirmer que, malgré l'obliquité de ces arêtes, notre prisme élémentaire conserve encore la forme d'un parallélépipède après l'instant dt, il faut prouver que tous ces côtés restent parallèles. Or, c'est ce qu'il est facile de vérifier en cherchant ce que deviennent les composantes u, v, w de la vitesse lorsqu'on passe du point M de notre
Fig. 256. parallélépipède primitif DC (fig. 256) à l'un de ces points B, C, D, etc., qui sont aux extrémités des angles. Or, si le point M dont les coordonnées sont x, y, z, a pour vitesses

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt}\dots (457);$$

le point B qui correspond aux coordonnées x, $y+dy$ et z, aura pour vitesses

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v'=\frac{d(y+dy)}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt}\dots (458),$$

et l'on voit que $\frac{dv'}{dx}$, $\frac{dv'}{dy}$ et $\frac{dv'}{dz}$ devront remplacer $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dv}{dz}$ dans les formules (454), (455) et (456). Mais nous allons voir que cette substitution est inutile. En effet, si l'on compare le terme $\frac{dv'}{dx}$ qui doit être substitué au terme $\frac{dv}{dx}$ de la formule (454), on reconnaîtra, à l'aide des for-

---

ment petit, car les quantités $\frac{dv}{dx}dx.dt$ et $\frac{dw}{dx}dx.dt$, qui sont les valeurs de RQ et de n'R, étant des infiniment petits du second ordre, il en doit être de même de l'hypothénuse n'Q du petit triangle rectangle n'QR formé par ces côtés. Mais le côté Nn' des triangles n'N'Q étant un infiniment petit du premier ordre, il en résulte que l'angle n'N'Q est infiniment petit.

mules (457) et (458), que ces termes ne diffèrent que par un infiniment petit qu'on a le droit de supprimer. Par conséquent la formule (454), qui donne la longueur du côté MA au bout du temps dt, exprime aussi bien la longueur du côté MB au bout du même temps.

On prouverait de même que tous les autres côtés qui étaient parallèles dans le parallélépipède primitif sont encore égaux dans sa nouvelle position.

650. Négligeant les infiniment petits du second ordre (*), autres que ceux qui composent le premier carré, et qui donneront lieu par suite à des réductions, les formules (454), (455) et (456), deviennent

$$\left.\begin{array}{l} dx\sqrt{\left(1+\frac{du}{dx}dt\right)^2},\quad dy\sqrt{\left(1+\frac{dv}{dy}dt\right)^2}, \\ dz\sqrt{\left(1+\frac{dw}{dz}dt\right)^2}, \end{array}\right\}\ldots (459).$$

et en extrayant les racines carrées, donnent

$$dx\left(1+\frac{du}{dx}dt\right),\ dy\left(1+\frac{dv}{dy}dt\right),\ dz\left(1+\frac{dw}{dz}dt\right)\ldots\quad (460),$$

pour les trois projections de $M'm'$ (fig. 253); et comme dans l'instant dt Fig. 253.
les extrémités M et m de la petite droite dont dx, dy et dz sont les projections, arrivent en M' et en m', la distance $M'm'$ représente donc ce que devient la droite Mm au bout de l'instant dt.

651. Ayant ainsi déterminé les trois projections de $M'm'$, si nous en formons le produit, c'est-à-dire si nous multiplions entre elles les trois quantités comprises sous le n° 460, nous aurons

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{du}{dx}dt\right)\left(1+\frac{dv}{dy}dt\right)\left(1+\frac{dw}{dz}dt\right)\ldots\ (461),$$

pour ce que sera devenu le parallélépipède $dx\,dy\,dz$ au bout de l'instant dt. A la vérité, le nouveau parallélépipède serait obliquangle dans la rigueur mathématique, comme nous l'avons vu, et par conséquent ne serait pas égal au produit de ses trois arêtes; mais l'erreur ne porterait

(*) On pourrait croire qu'on devrait aussi supprimer les infiniment petits du premier ordre devant la quantité finie 1, ce qui réduirait notre radical à $\sqrt{1}$. Si nous ne le faisons pas, c'est que l'esprit de ce calcul consiste à ne point faire de suite de réduction, parce que, comme nous le verrons, les quantités finies se détruisent mutuellement à la fin du calcul. Le mélange de ces sortes de quantités n'est que momentané.

que sur les termes en dt^2 que nous avons négligés, parce que ces termes sont les seuls qui écartent les projections de leurs directions primitives. Ainsi nous pouvons adopter que le nouveau parallélépipède est exactement représenté par la formule (464). Cela posé, en formant le produit indiqué par cette formule, et en effaçant les termes en dt^2 et en dt^3, qui se trouvent compris entre les parenthèses, il restera

$$dxdydz\left(1 + \frac{du}{dx}dt + \frac{dv}{dy}dt + \frac{dw}{dz}dt\right).$$

652. Si nous représentons maintenant par ρ la densité du fluide au bout du temps t, et par ρ' cette densité au bout du temps $t + dt$, comme la masse est égale au volume multiplié par la densité, et que, par hypothèse, le volume $dxdydz$ correspond au temps t; la masse fluide renfermée dans ce volume sera donc exprimée par $\rho dxdydz$, et, d'après ce qui précède, cette même masse fluide, au bout du temps $t + dt$, deviendra

$$\rho' dxdydz\left(1 + \frac{du}{dx}dt + \frac{dv}{dy}dt + \frac{dw}{dz}dt\right);$$

et en représentant par k la quantité $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$, cette expression pourra s'écrire de cette manière abrégée

$$\rho' dxdydz(1 + kdt).$$

653. Dans le cas où le fluide est incompressible, une masse donnée devant toujours occuper le même espace dans quelque temps que ce soit, la densité sera constante, et les masses que nous venons de considérer seront égales; d'où il suit qu'on aura

$$\rho dxdydz = \rho[dxdydz(1 + kdt)];$$

réduisant et supprimant les facteurs communs, il restera $k = 0$; mettant la valeur que représente k, art. 652, on aura donc

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Telle est la condition qui doit être satisfaite pour que le fluide soit incompressible.

654. Dans le cas où le fluide est compressible ou élastique, on doit regarder la densité qui a lieu au point m' comme une fonction des coordonnées x, y, z; et cette fonction se déterminera en ajoutant à ρ les accroissemens dus aux variables x, y, z; on aura donc

$$\rho' = \rho + \frac{d\rho}{dt}dt + \frac{d\rho}{dx}dx + \frac{d\rho}{dy}dy + \frac{d\rho}{dz}dz \ldots \quad (462);$$

mais comme l'instant qui s'est écoulé pendant le mouvement de notre petit parallélépipède est dt, on aura

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt;$$

remplaçant dx, dy et dz par ces valeurs, l'équation (460) deviendra

$$\rho' = \rho + \frac{d\rho}{dt}dt + \frac{d\rho}{dx}.udt + \frac{d\rho}{dy}.vdt + \frac{d\rho}{dz}.wdt,$$

ou plutôt

$$\rho' = \rho + \left(\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz}\right)dt,$$

équation qui est de la forme

$$\rho' = \rho + \mathrm{L}dt.$$

Or, la densité étant en raison inverse du volume, on a

$$\rho : \rho' :: dxdydz(1 + kdt) : dxdydz;$$

ou, en mettant la valeur de ρ', et en supprimant le facteur commun,

$$\rho : \rho + \mathrm{L}dt :: (1 + kdt) : 1;$$

égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on a

$$\rho = (\rho + \mathrm{L}dt)(1 + kdt);$$

développant et négligeant le terme en dt^2, qui est un infiniment petit du second ordre, il restera

$$\rho kdt + \mathrm{L}dt = 0,$$

et en supprimant le facteur commun dt, cette équation se réduira à

$$\rho k + \mathrm{L} = 0.$$

Si l'on met dans ce dernier résultat les valeurs de k et de L, on obtiendra enfin

$$\rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + u\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0 \ldots (463).$$

655. Cette équation peut se simplifier; car en considérant d'abord les deux termes affectés de u, il est aisé de voir qu'ils sont la différentielle exacte de ρu, par rapport à x et divisée par dx.

La même observation pouvant s'appliquer aux deux termes en v, et aux deux termes en w, il en résulte qu'on peut mettre l'équation précédente sous cette forme

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0 \ldots (464).$$

654. Cette équation renferme comme cas particulier, celui où la densité est constante. En effet, la différentielle d'une constante étant nulle,

$$d\rho = 0;$$

donc le terme en $\frac{d\rho}{dt}$ n'existe pas, et dans les autres ρ étant constant, devient un facteur commun qu'on supprime; alors l'équation précédente se réduit à

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu, art. 653.

657. L'équation (464), qui établit une relation entre la vitesse et la densité, est appelée l'équation de la continuité du fluide, parce que c'est d'après cette hypothèse qu'elle est fondée. En effet, lorsque nous passons des petites arêtes du parallélépipède au volume de ce parallélépipède, nous admettons que le fluide qui y est renfermé participe au mouvement que reçoivent ces arètes. Or, c'est ce qui a lieu s'il n'y a point de solution de continuité qui empêche les particules fluides de se suivre. Cette hypothèse de la continuité du fluide se trouve en défaut dans quelques cas particuliers. Par exemple, lorsque les molécules fluides qu'un jet d'eau a transportées dans l'atmosphère descendent sur la terre, elles se subdivisent, et, séparées par l'action de l'air, elles laissent entre elles des vides qui les font retomber en petites gouttes d'eau. Dans de semblables cas, la théorie générale que nous avons exposée n'est plus applicable; aussi n'est-elle pas toujours d'accord avec l'expérience.

658. L'équation de la continuité d'un fluide étant loin de suffire pour la détermination de nos trois inconnues, nous allons en obtenir trois autres qui nous seront données par la considération des forces accélératrices. Pour cet effet, supposons qu'on ait réduit toutes les forces accélératrices à trois composantes rectangulaires X, Y et Z, parallèles à chacun des axes, et agissant à l'expiration du temps t sur les molécules fluides dont les coordonnées sont x, y, z; si ces forces agissaient librement, comme elles impriment au bout du temps t des vitesses qui sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, elles accroîtraient ces vitesses des quantités Xdt, Ydt et Zdt, qui sont les vitesses que les forces accélératrices X, Y, Z sont capables de produire dans l'instant dt; mais comme le point fluide que nous considérons est lié aux autres, et participe à leur commun mouvement, les accroissemens de vitesse, au lieu d'être Xdt, Ydt et Zdt, seront les ac-

croissemens $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$ que reçoivent $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ an bout du temps dt. Ainsi, à l'expiratien de dt, nous aurons pour les accroissemens de vitesse effectifs,

$$d.\frac{dx}{dt},\quad d.\frac{dy}{dt},\quad d.\frac{dz}{dt},$$

et pour les accroissemens dus aux seules forces accélératrices,

$$Xdt,\ Ydt,\ Zdt;$$

et comme, d'après le principe de d'Alembert, les vitesses gagnées ou perdues doivent équivaloir aux vitesses que pourraient communiquer les forces accélératrices, moins celles qui ont réellement lieu, on aura pour les vitesses perdues ou gagnées

dans le sens des x....... $Xdt - d.\frac{dx}{dt}$,

dans le sens des y....... $Ydt - d.\frac{dy}{dt}$,

dans le sens des z....... $Zdt - d.\frac{dz}{dt}$.

Soient maintenant X', Y', Z' les forces accélératrices qui, dans le cas de l'équilibre, seraient capables d'imprimer ces vitesses au fluide. Comme on a vu art. (298), qu'une force accélératrice φ étant donnée, l'accroissement qu'elle est capable de communiquer à un mobile dans l'instant dt, était représenté par φdt, nous aurons donc

$$X'dt;\ Y'dt \quad \text{et} \quad Z'dt,$$

pour les accroissemens de vitesse que peuvent communiquer à notre molécule fluide les forces hypothétiques X', Y' et Z'. Or, comme nous supposons que ces accroissemens sont précisément égaux aux vitesses gagnées ou perdues, nous aurons donc, d'après le principe de d'Alembert,

$$Xdt - d.\frac{dx}{dt} = X'dt,$$
$$Ydt - d.\frac{dy}{dt} = Y'dt,$$
$$Zdt - d.\frac{dz}{dt} = Z'dt;$$

et puisque dx, dy, dz, sont les espaces parcourus, on a

$$\frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,\quad \frac{dz}{dt} = w\ldots \quad (465).$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, nous réduirons ces équations à

$$\left.\begin{array}{l} Xdt - du = X'dt, \\ Ydt - dv = Y'dt, \\ Zdt - dw = Z'dt. \end{array}\right\} \ldots \quad (466).$$

D'une autre part, les forces X', Y', Z' étant celles qui sont capables de mettre le fluide en équilibre, satisfont nécessairement aux équations générales (392) de l'équilibre des fluides, page 351; donc, en y remplaçant X, Y, Z par les composantes X', Y', Z', on a

$$\frac{dp}{dx} = \rho X'; \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y', \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z'.$$

659. Au moyen des valeurs de X', de Y' et de Z' fournies par ces équations, les formules (466) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} Xdt - du = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}dt, \\ Ydt - dv = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}dt, \\ Zdt - dw = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}dt. \end{array}\right\} \ldots \quad (467).$$

Les différentielles du, dv et dw, qui entrent dans ces équations, devant être prises en regardant les composantes u, v et w de la vitesse comme fonctions des variables t, x, y et z, on a en général

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz,$$

$$dw = \frac{dw}{dt}dt + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz;$$

et, en mettant dans ces équations les valeurs des différentielles dx, dy et dz, tirées des équations (465), on obtient

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}.udt + \frac{du}{dy}.vdt + \frac{du}{dz}.wdt,$$

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}.udt + \frac{dv}{dy}.vdt + \frac{dv}{dz}.wdt,$$

$$dw = \frac{dw}{dt}dt + \frac{dw}{dx}.udt + \frac{dw}{dy}.vdt + \frac{dw}{dz}.wdt.$$

Introduisant ces valeurs dans les équations (467), transposant et supprimant le facteur commun dt, nous aurons ce dernier résultat :

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u.\frac{du}{dx} + v.\frac{du}{dy} + w.\frac{du}{dz}, \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{dv}{dy} + w.\frac{dv}{dz}, \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u.\frac{dw}{dx} + v.\frac{dw}{dy} + w.\frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right\} \ldots (468).$$

660. Ces trois équations jointes à celle de la continuité du fluide et à l'équation $p = \Pi\rho$, qui établit une relation entre la pression et la densité (démontrée art. 548), suffiront pour déterminer les cinq inconnues p, ρ, u, v et w.

Telles sont les équations générales du mouvement des fluides, équations dont l'intégration présente des difficultés que l'on n'a pu vaincre jusqu'à ce jour que dans des cas particuliers.

FIN.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE, page 4.

Considérations sur deux manières différentes de commencer la Statique.

Il se présente deux manières différentes de commencer la Statique, selon qu'on démontre *à priori* le parallélogramme des forces ou le principe fondamental des forces parallèles. Cette seconde marche me paraissant plus naturelle que l'autre, je l'ai adoptée. Cependant ceux qui préféreront suivre la première, le feront aisément en remplaçant les articles compris depuis 18 jusqu'à 27 inclusivement, par l'une des démonstrations du parallélogramme des forces de MM. Duchayla et Poisson, que je vais exposer dans cette Note.

Démonstration du parallélogramme des forces de M. Duchayla.

Cette démonstration reposant sur les articles 25 et 26, le lecteur voudra bien en prendre connaissance lorsqu'il sera arrivé à l'article 17, et ajouter ce qui suit :

1°. Considérons maintenant deux forces égales appliquées
Fig. 257. à un point A (fig. 257), et dirigées l'une suivant AC et l'autre suivant AB. Si l'on représente les forces P et Q par les parties égales AB et AC de leurs directions, et que l'on construise le parallélogramme ACDB, la diagonale AD partagera l'angle CAB en deux parties égales ; donc la résultante des forces P et Q sera dirigée, art. 26, suivant la diagonale de ce parallélogramme.

2°. Si l'on augmente ensuite la force AB (fig. 258) d'une
Fig. 258. partie B*b* qui lui soit égale, et qu'on forme le second parallélogramme DB*b*R, comme les droites BD et B*b* sont égales, leur résultante sera encore dirigée suivant la diagonale BR. Cela posé,

on va démontrer que la résultante R des forces AC et A*b* sera aussi dirigée suivant la diagonale AR de leur parallélogramme. Pour cet effet, on remarquera que le point A tiré par les forces égales AB et AC, doit se mouvoir de la même manière, art. 26, que si une force unique l'entraînait suivant AD; or cette force ne peut agir sur A qu'à l'aide d'une suite de points contigus liés immédiatement entre eux, et dont l'un, en s'avançant vers S, contraindrait tous les autres à marcher dans le même sens. Le point D faisant partie de ces points, puisqu'il est dans leur direction, on sent qu'au lieu de considérer A comme tiré par les forces égales AC et AB, c'est la même chose que de supposer que D, qui lui est lié par les points mobiles intermédiaires, soit poussé par les forces égales CD et BD dans la direction DS. On peut donc, au système des trois forces AC, AB et B*b*, substituer celui des forces CD, BD et B*b*. La force BD qui pousse le point D, agit comme si elle entraînait B; par conséquent on a le droit, art. 1*, de remplacer les forces BD et B*b* qui sont appliquées en B, par BR; nos trois forces se réduisent donc à deux, l'une dirigée suivant CD, et l'autre suivant BR : or une force pouvant toujours être transportée en tout point pris sur sa direction, art. 12, on peut transporter les deux forces qui agissent suivant CD et BR à leur point de concours R, et ce point R sera mû comme s'il était sollicité par l'action simultanée de ces deux forces, par conséquent il sera un point de leur résultante. D'une autre part, cette résultante, étant celle de tout le système, passe aussi par le point A. Ainsi voilà deux points A et R par lesquels elle passe, ce qui suffit pour en déterminer la direction et pour qu'on puisse affirmer qu'elle agit suivant AR.

3*. Par cette démonstration on prouve donc que lorsqu'on a deux parallélogrammes CB et D*b* dans lesquels les résultantes suivent les directions des diagonales AD et BR, le parallélogramme C*b* jouira de la même propriété d'indiquer par sa

diagonale AH la direction de la résultante des forces AC et A*b*.

4*. Construisons les deux parallélogrammes AD et BF
Fig. 259. (fig. 259), dont les côtés AC et AB, BD et BE soient égaux; la résultante dans chacun sera dirigée, art. 1*, suivant la diagonale; par conséquent le parallélogramme AF, qui résulte de leur assemblage, et dont les côtés AC et AE sont dans le rapport de 1 à 2, aura sa résultante, art. 3*, dirigée suivant la diagonale AF. Prenons ensuite EG = EF, le parallélogramme AH aura encore, art. 3*, sa résultante dirigée suivant la diagonale; et l'on voit que les côtés AC et AG seront entre eux dans le rapport de 1 à 3. En continuant à augmenter ainsi l'un des côtés du parallélogramme de parties égales à AB, on obtiendra une suite de parallélogrammes dont les côtés seront successivement dans les rapports de 1 à 4, de 1 à 5, etc., et qui jouiront tous de la même propriété. Donc en général, dans un parallélogramme formé par deux forces dont les intensités sont entre elles dans le rapport de l'unité à un nombre entier n, la diagonale indique la direction de la résultante.

5*. Si les côtés AK et AI (fig. 260) d'un parallélogramme
Fig. 260. sont commensurables, c'est-à-dire s'ils sont entre eux dans le rapport de deux nombres entiers m et n, la résultante sera encore dirigée suivant la diagonale AM. En effet, en partageant AK et AI en parties égales à l'unité de mesure AC, on formera une suite de parallélogrammes AL, CL', C'L'', C''L''', etc., qui tous ayant leurs côtés dans le rapport de AC à AI ou de 1 : n, jouiront chacun, art. 4*, de la propriété requise. Donc, art. 3*, les deux premiers prouveront qu'il en est de même du parallélogramme AL' qui résulte de leur réunion, et dont les côtés sont dans le rapport de 2 à n. Le parallélogramme AL' et le 3e B'L'', montreront à leur tour que la même propriété appartient au parallélogramme AL'', dont les côtés sont dans le rapport de 3 à n, et ainsi de suite

jusqu'au parallélogramme AM, dont les côtés sont dans le rapport de m à n (*).

6*. Pour traiter le cas où les côtés du parallélogramme sont incommensurables, on va démontrer préliminairement que la résultante de deux forces inégales P et Q (fig. 261 et 262) qui concourent en un point A, est dans l'angle formé par les directions de ces forces : cela se réduit à prouver que cette résultante ne peut agir dans l'espace K (fig. 261), terminé par la droite indéfinie mm', ni dans l'espace L (fig. 262), terminé par la droite indéfinie nn'. En effet (fig. 261) la force Q ne peut faire mouvoir le point A dans l'espace K, puisque son action est dirigée dans le sens de A vers m; la force P ne peut faire mouvoir ce point dans l'espace K, puisqu'elle agit dans un sens opposé, ainsi rien ne peut contribuer à faire mouvoir A dans l'espace K. Un même raisonnement s'appliquerait à la

Fig. 261 et 262. Fig. 261. Fig. 262. Fig. 261.

(*) Si l'on voulait se contenter des considérations de l'infini, on pourrait se dispenser de lire les articles 6*, 7* et 8*, et conclure de suite de la manière suivante, que la proposition est encore vraie dans le cas où les droites AK et AI (fig. 260) sont incommensurables; en effet, si l'on partage AK en parties égales, plus leur nombre sera grand, plus l'une de ces parties, que nous représenterons par q, sera petite. Or, si en portant q un certain nombre de fois sur AI on ne recouvre pas entièrement cette droite, il y aura un reste r moindre que q; par conséquent en partageant AI en un nombre convenable de parties égales, q, et à plus forte raison r qui lui est inférieur, deviendra aussi petit que l'on voudra; ce qui nous fait voir que ce reste r peut être pris au-dessous de toute quantité donnée, et par conséquent être compté pour nul. Cela deviendra encore plus évident si l'on fait attention que la quantité variable r devenant d'autant plus petite qu'on augmente davantage les points de division, on a la possibilité de prendre r au-dessous de toute ligne donnée, quelque peu d'étendue qu'elle ait. Or, cela ne revient-il pas à dire que toute quantité linéaire qui existe est au-dessus de r, ou, en d'autres termes, que r doit être regardé comme nul? Il résulte donc de cette démonstration que la proposition est vraie dans toutes les hypothèses. Fig. 260.

figure 262, pour prouver que A ne peut se mouvoir dans l'espace L.

Il résulte de ce qui précède, qu'un point A sollicité par deux forces quelconques, doit se mouvoir dans l'angle formé par les directions de ces forces.

Fig. 263. 7*. Soient deux forces représentées (fig. 263) par les parties AB et AC qui leur sont proportionnelles : on va prouver que si l'on augmente la composante AB d'une partie B*b*, la résultante s'approchera de AB. En effet, soit AR la résultante inconnue des forces AB et AC; la nouvelle force B*b* pouvant être transportée à tout point pris sur sa direction, transportons-la au point A, en prenant A*b'* = B*b* : alors la nouvelle résultante sera la même que celle des forces AC, AB et A*b'*. Ces trois forces pouvant être remplacées par ces deux-ci, AR et A*b'*, il suit de l'article 6* que la nouvelle résultante passera dans l'angle RA*b'* formé par la direction de ces forces, et par conséquent s'approchera plus de AB que AR ne s'en approchait.

8*. Considérons maintenant deux forces incommensurables
Fig. 264. AB et AC (fig. 264). Si leur résultante n'était pas dirigée suivant la diagonale AD, elle ne pourrait qu'être située au-dessus ou au-dessous, comme le sont AR' et AR". Dans le premier cas, on partagerait CA en parties égales plus petites que DR'; et en portant un certain nombre de ces parties sur CD, l'un des points de division D' tomberait nécessairement dans l'intervalle compris entre R' et D; alors le parallélogramme AD' aurait ses côtés commensurables; donc sa diagonale serait dirigée suivant AD' : mais il s'ensuivrait qu'en augmentant de B'B le côté AB' de ce parallélogramme, la diagonale qui était AD' deviendrait AR', et qu'ainsi, au lieu de s'approcher de AB, elle s'en écarterait; ce qui est absurde par l'article précédent.

Dans le second cas, si la résultante du parallélogramme AD était dirigée suivant AR", on partagerait CA en parties égales plus petites que DR"; et en portant un nombre suffisant de

ces parties sur la droite CD prolongée, l'un des points de division D″ tomberait entre D et R″. Alors le parallélogramme AD″ ayant ses côtés commensurables, la résultante des forces AC et AB″ serait dirigée suivant AD″; mais la résultante du parallélogramme AD étant, par hypothèse, AR″, il en résulterait que si l'on augmentait AB de BB″, la résultante, qui, dans le premier cas, est AR″, deviendrait dans le second AD″, et par conséquent s'éloignerait du côté AB; ce qui est encore absurde d'après ce qui précède : donc la résultante ne peut être que AD.

9*. On démontrerait ensuite, comme dans l'article 28, que lorsque les composantes P et Q sont représentées en intensité par les droites AC et AB (fig. 264), la résultante doit l'être par la diagonale AD. Fig. 264.

Démonstration du parallélogramme des forces de M. Poisson, présentée avec quelques modifications.

Soient deux forces égales P et P′ (fig. 265) qui sollicitent un point A, et $2x$ l'angle qu'elles forment entre elles : il y a deux choses à déterminer dans ce problème : 1° l'angle que forme la résultante avec l'une des composantes; 2° l'intensité de cette résultante. Nous avons vu, art. 26, que cette résultante passait par le milieu de l'angle des forces : ainsi il ne s'agit que d'en trouver l'intensité. Or, il est évident que la résultante dépendant de l'angle x qu'elle forme avec l'une des composantes, et de l'intensité P de cette composante, nous avons Fig. 265.

$$R = F(P, x).$$

Représentons (fig. 265) l'intensité de la force P par AB, et l'unité de force Ab par l : si l est renfermé un certain nombre de fois dans AB, quatre fois, par exemple, nous aurons Fig. 265.

$$P = 4l.$$

En général si n exprime le facteur entier, fractionnaire ou irra-

tionnel, qui, multiplié par l, doit reproduire P, nous aurons

$$P = nl.$$

La question est de trouver la longueur inconnue AR de la résultante, et par conséquent le nombre de fois que $Ab = l$ est renfermé dans AR. Soit z ce nombre, nous aurons

$$R = zl\,;$$

on tire de ces équations,

$$\frac{P}{R} = \frac{nl}{zl}.$$

Si, au lieu de $l = Ab$, on prend une droite arbitraire p pour unité de force, et qu'on représente par m le nombre qui, multiplié par p, doit reproduire l, nous aurons $l = mp$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on obtiendra, après avoir supprimé les facteurs communs,

$$\frac{P}{R} = \frac{n}{z}.$$

Ce résultat nous montre que le rapport $\frac{P}{R}$ est indépendant de l'unité de force représentée par p.

Cela posé, R étant une fonction de P et de x, ordonnons cette fonction par rapport aux puissances de P, nous aurons

$$R = A + BP + CP^2 + DP^3 + \text{etc.}\,;$$

divisant par P, il viendra

$$\frac{R}{P} = \frac{A}{P} + B + CP + DP^2 + \text{etc.},$$

et en mettant dans le second membre de cette équation la valeur de P, on obtiendra

$$\frac{R}{P} = \frac{A}{mnp} + B + Cmnp + Dm^2n^2p^2 + \text{etc.}$$

Or, $\frac{R}{P}$ devant être indépendant de p, il faut que les termes affectés de p s'évanouissent; donc

$$\frac{R}{P} = B;$$

les puissances de P étant en évidence dans le développement de R, il s'ensuit que B est une quantité qui ne contient pas P : donc B ne peut renfermer que x; ainsi nous supposerons

$$B = \varphi x,$$

hypothèse qui n'empêche pas que φx ne soit une constante, si le cas l'exige : cette valeur étant mise dans l'équation précédente, la convertit en

$$\frac{R}{P} = \varphi x;$$

d'où l'on tire

$$R = P\varphi x \ldots\ldots (469).$$

Occupons-nous maintenant à déterminer la forme de $\varphi\, x$.

Pour cela, regardons P et P′ (fig. 266) comme les résultantes de quatre forces égales Q, Q′, Q″, Q‴ qui forment chacune un angle z avec P ou P′, nous aurons Fig. 266.

$$QAQ' = 2z, \quad Q''AQ''' = 2z.$$

Or, par la même raison que la résultante R des forces égales P et P′ qui forment entre elles un angle $2x$, est donnée par l'équation (469), la résultante des forces égales Q et Q′, qui forment entre elles un angle $2z$, nous sera donnée par l'équation

$$P = Q\varphi z \ldots (470).$$

Les forces Q et Q‴ étant aussi égales à Q, et comprenant entre elles un angle $QAQ''' = QAP + PAP' + P'AQ''' = z + 2x + z = 2(x + z)$, la résultante de ces forces sera

représentée par

$$Q\varphi\,(x+z).$$

De même les forces Q′ et Q″ égales à Q, qui forment entre elles un angle $Q'AQ'' = PAP' - PAQ' - P'AQ'' = 2x - 2z = 2\,(x-z)$, auront pour résultante

$$Q\varphi\,(x-z).$$

Nous avons vu, art. 26, que lorsque les forces étaient égales, leur résultante passait par le milieu de l'angle de ces forces; il suit de là que les résultantes des forces Q et Q‴, Q′ et Q″ coïncideront; par conséquent il suffira de les ajouter pour former la résultante totale R; nous aurons donc

$$R = Q\varphi\,(x+z) + Q\varphi\,(x-z)\ldots \quad (471).$$

Si maintenant nous éliminons P entre les équations (469) et (470), nous trouverons cette autre valeur de la résultante

$$R = Q\varphi z.\varphi x.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (471), et divisant par Q, facteur commun, nous obtiendrons

$$\varphi z.\varphi x = \varphi\,(x+z) + \varphi\,(x-z).$$

Développant le second membre par la formule de Taylor (*Élémens de Calcul différentiel*), on obtient

$$\varphi z.\varphi x = \varphi x + \frac{d\varphi x}{dx}z + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{z^2}{2} + \frac{d^3\varphi x}{dx^3}\frac{z^3}{2.3} + \frac{d^4\varphi x}{dx^4}\frac{z^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$
$$+ \varphi x - \frac{d\varphi x}{dx}z + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{z^2}{2} - \frac{d^3\varphi x}{dx^3}\frac{z^3}{2.3} + \frac{d^4\varphi x}{dx^4}\frac{z^4}{2.3.4} - \text{etc.},$$

et en réduisant, on trouve

$$\varphi z.\varphi x = 2\left(\varphi x + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{z^2}{2} + \frac{d^4\varphi x}{dx^4}\frac{z^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

Divisant par φx, on tire de cette équation

$$\varphi z = 2\left(1 + \frac{d^2\varphi x}{\varphi x dx^2}\frac{z^2}{2} + \frac{d^4\varphi x}{\varphi x dx^4}\frac{z^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

Or, l'angle z est indépendant de l'angle x des forces P et P'; car cet angle z peut être donné arbitrairement, et l'on conçoit qu'il peut exister deux forces égales Q et Q', qui formant chacune avec P un angle z, produiront ensemble le même effet que P. A la vérité l'intensité Q, nécessaire pour produire cet effet, ne sera pas connue; mais nous n'avons pas besoin ici de la connaître : z pouvant donc être pris à volonté, est indépendant de l'angle x qui résulte nécessairement des directions données des forces; d'où il suit que φz est une quantité indépendante de x; car si z était égal à une fonction de x que je représenterai par X, alors φz deviendrait φX, et par conséquent dépendrait de x.

Cela posé, le développement de φz se trouvant ordonné par rapport aux puissances de z, les coefficiens qui y entrent ne peuvent, par cela même, renfermer que des x et des constantes. Or, nous venons de prouver que dans le développement de φz, il n'entrait aucun terme en x; donc ces coefficiens sont constans, et nous avons

$$\frac{d^2\varphi x}{\varphi x dx^2} = b, \quad \frac{d^4\varphi x}{\varphi x dx^4} = c, \text{ etc.}$$

La première équation nous donne

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = b\varphi x;$$

différentiant deux fois de suite cette équation, et divisant par dx^2, on en déduit

$$\frac{d^4\varphi x}{dx^4} = b\frac{d^2\varphi x}{dx^2};$$

le second membre de cette équation se réduit, au moyen de la précédente, à $b^2\varphi x$; donc

$$\frac{d^4\varphi x}{\varphi x dx^4} = b^2;$$

déterminant de même les autres constantes, on en mettra les valeurs dans le développement de φz, et l'on obtiendra

$$\varphi z = 2\left(1 + \frac{bz^2}{2} + \frac{b^2z^4}{2.3.4} + \frac{b^3z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on fait $b = -a^2$, on trouvera

$$\varphi z = 2\left(1 - \frac{a^2z^2}{2} + \frac{a^4z^4}{2.3.4} - \frac{a^6z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right);$$

cette valeur de φz est précisément le développement de $2\cos az$, ainsi qu'on peut le vérifier en réduisant en série $2\cos az$ par la formule de Maclaurin (*Élémens de Calcul différentiel*); donc

$$\varphi z = 2\cos az;$$

changeant z en x dans cette équation, on a

$$\varphi x = 2\cos ax;$$

substituant cette valeur dans celle de R, on obtient enfin

$$R = 2P\cos ax \ldots \quad (472).$$

Pour déterminer la constante a, soit $2x = 200°$: alors P et P′ se trouvent directement opposés; et comme ces forces sont égales, elles se font équilibre; la résultante est donc nulle dans ce cas, et l'on a

$$2P\cos(a \times 100) = 0,$$

et en supprimant le facteur 2P, il reste

$$\cos(a \times 100) = 0.$$

Or, le cosinus qui est nul ne peut appartenir qu'à l'un de
Fig. 169. ces arcs (fig. 169),

BE, BEAF, BEAFBE, etc.;

c'est-à-dire à l'un des suivans,

$$100, \quad 3.100, \quad 5.100, \quad \text{etc.};$$

donc a ne peut être qu'un nombre impair.

Je dis maintenant que $a=1$; car aucune autre hypothèse de nombre impair ne peut subsister. Par exemple, si l'on faisait $a=3$, comme x est arbitraire, on pourrait supposer

$$x=\frac{100}{3},$$

et l'angle $2x$ des forces deviendrait

$$\frac{2.100}{3}=\frac{2}{3}.100;$$

ces forces formant alors un angle moindre que 200°, auraient une résultante; car il faudrait que leurs directions se confondissent pour qu'il n'y en eût pas.

D'une autre part, l'hypothèse de $a=3$ et de $x=\frac{100}{3}$ change l'équation (472) en

$$R=2P\cos 100,$$

et, en observant que le cosinus de 100° est nul, cette équation se réduit à

$$R=0,$$

résultat qui est en contradiction avec le précédent, car nous avons vu que, dans cette hypothèse, les forces auraient une résultante; donc puisqu'on ne peut, sans absurdité, prendre pour le nombre impair a une autre valeur que l'unité, concluons que $a=1$, et que l'on a

$$R=2P\cos x.$$

Si l'on construit maintenant la losange BAB'D (fig. 267), le côté AB étant représenté par P, et l'angle BOA par x, on a Fig. 267.

évidemment

$$AO = P \cos x\,;$$

donc

$$2AO \quad \text{ou} \quad AD = 2P \cos x.$$

Il est facile maintenant de démontrer que la proposition est vraie, lorsque les forces P et P′ sont inégales et rectangulaires.
Fig. 268. En effet, ayant achevé le parallélogramme PAP′D (fig. 268), on mènera la parallèle EF à la diagonale PP′, et les parallèles PE, P′F à la diagonale AD. Cela posé, les diagonales PP′ et AD se coupant en quatre parties égales au point O, on aura

$$AO = OP.$$

D'une autre part, les droites OP et EA étant égales comme parallèles comprises entre parallèles, il s'ensuit qu'on a

$$AO = EA:$$

le parallélogramme EAOP est donc une losange qui a AP pour diagonale; par conséquent, en vertu du théorème précédent, on peut substituer à la force AP les deux forces égales AE et AO.

On prouverait de même qu'on peut remplacer AP′ par les forces égales AO et AF; donc au lieu du système des forces AP et AP′, on peut mettre celui des forces 2AO, AE et AF; ces deux dernières forces se détruisent comme directement opposées et égales chacune à la moitié de PP′. Ainsi, il ne reste plus que 2AO pour la résultante de AP et de AP′. Or

$$2AO = AO + OD = AD\,;$$

donc la résultante des forces AP et AP′ peut être représentée par la diagonale du parallélogramme PAP′D.

Dans le cas où les forces sont inégales, mais non rectangulaires, la proposition est encore vraie; car soient AP et AP′
Fig. 269. (fig. 269) ces deux forces, on substituera à AP les deux com-

posantes rectangulaires AC et AD; alors le système des forces AP et AP′ sera le même que celui des forces AD + AP′ + AC. Or, AD étant égal à P′F, on peut mettre AF à la place de AD + AP′, et il ne s'agira plus que de déterminer la résultante des forces AF et AC. Cette résultante, d'après ce qui précède, est évidemment AE; et comme AE est la diagonale du parallélogramme APEP′, il s'ensuit que la proposition est vraie quel que soit l'angle des forces.

NOTE DEUXIÈME, page 21.

Démonstration dont le but est de prouver que la somme des carrés du sinus et du cosinus est égale à l'unité.

On parviendrait encore à démontrer de la manière suivante, que la somme des carrés des cosinus des angles formés par les composantes, est égale à l'unité. Soit φ l'angle DAC formé par la droite AD (fig. 29) avec sa projection AC sur le plan xAy, et θ l'angle BAC que cette projection fait avec l'axe Ax; les triangles ABC, ADC, rectangles en C, nous donnent Fig. 29.

$$AB = AC\cos\theta,\quad BC = AC\sin\theta,$$
$$AC = AD\cos\varphi,\quad DC = AD\sin\varphi.$$

On tire des trois premières de ces quatre équations,

$$AB = AD\cos\varphi\cos\theta,\quad BC = AD\cos\varphi\sin\theta.$$

Substituant ces valeurs et celles de DC dans les équations (9) et (8), page 21, et supprimant le facteur commun, il restera

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\theta,\quad \cos\beta = \cos\varphi\sin\theta,\quad \cos\gamma = \sin\varphi.$$

Ces équations, élevées au carré et réduites, reproduisent l'équation (10).

NOTE TROISIÈME, page 27.

Nouveau procédé pour déterminer les équations de la résultante des forces appliquées à un point.

Voici un moyen très simple de trouver les équations de la résultante. On sait qu'une droite dans l'espace, assujétie à passer par un point dont les coordonnées sont x', y', z', a pour équations

$$z - z' = A(x - x'), \quad z - z' = B(y - y') \ldots (473).$$

Supposons que les coordonnées des points extrêmes de la droite qui représente en intensité la résultante, soient respectivement x', y', z' et x'', y'', z'', les équations (473) nous donneront

$$z'' - z' = A(x'' - x'), \quad z'' - z' = B(y'' - y');$$

d'où l'on tirera

$$A = \frac{z'' - z'}{x'' - x'}, \quad B = \frac{z'' - z'}{y'' - y'} \ldots (474).$$

Or il est évident que les différences $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ des coordonnées des points extrêmes de la résultante ne sont autre chose que les projections X, Y et Z de cette droite sur les axes des x, des y et des z; par conséquent les équations (474) peuvent s'écrire ainsi,

$$A = \frac{Z}{X}, \quad B = \frac{Z}{Y};$$

substituant ces valeurs dans les équations (473), on aura

$$z - z' = \frac{Z}{X}(x - x'), \quad z - z' = \frac{Z}{Y}(y - y').$$

NOTE QUATRIÈME, page 51.

Réflexions sur les équations d'équilibre.

Les équations (55), (56) et (57), page 51, nous offrent des conséquences remarquables. En considérant d'abord les deux premières, on reconnaît celles que nous avons trouvées être nécessaires, art. 40 et 43, pour que les forces soient en équilibre autour d'un point fixe ; c'est ce qui résulte immédiatement de la théorie que nous avons exposée ; car en supposant que l'équation (57) soit satisfaite, les forces du système concourent nécessairement en un point, et si l'on transporte toutes les forces du système en ce point, on pourra les décomposer en deux groupes de forces, les unes parallèles à l'axe des x, et les autres parallèles à l'axe des y. Ces nouvelles composantes auront les mêmes intensités que lorsque les forces étaient appliquées en différens points, parce que ces forces ayant été transportées parallèlement à elles-mêmes, art. 92, les parallélogrammes n'ont pas changé. Il suit de là que si la somme des composantes parallèles à chacun des axes est nulle, le point de concours qui est sur la résultante ne pourra se mouvoir dans aucun sens ; car s'il avait cette faculté, le système des forces aurait une résultante, et cette résultante serait décomposable en deux forces X et Y, parallèles aux axes coordonnés ; or, par la nature des équations (55) et (56), les composantes parallèles aux axes coordonnés étant nulles, nous tomberions dans une contradiction.

Lorsque l'équation (57) n'est pas satisfaite, les équations (55) et (56) ne suffisent pas pour obtenir l'équilibre. En effet, soit R la résultante de toutes les forces, hors P et P′ ; ayant réduit le système aux trois forces P, P′ et R, ces forces ne pourront concourir en un point, parce que l'équation (57) n'est pas satisfaite ; par conséquent le point de concours B (fig. 270) des forces P et P′ ne sera pas le même que le point Fig. 270.

d'application A de la force R. Nommons R′ la résultante des forces P et P′; et supposons que R et R′ forment respectivement avec les axes coordonnés des angles a, b, et a', b', nous aurons

$$R'\cos a' = P\cos\alpha + P'\cos\alpha',$$
$$R'\cos b' = P\cos\beta + P'\cos\beta',$$
$$R\cos a = P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.},$$
$$R\cos b = P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.}$$

Au moyen de ces valeurs les équations (55) et (56) deviendront

$$R\cos a = -R'\cos a',$$
$$R\cos b = -R'\cos b'.$$

Ces composantes étant égales et de signes contraires, il suit de là que si R cos a et R cos b sont représentés par les droites AC et AD, les deux autres composantes le seront par les droites BE et BF, respectivement égales à AC et à AD; par conséquent les rectangles CD et EF seront égaux. D'où il résulte que les forces R et R′ représentées par les diagonales de ces rectangles, seront égales et parallèles. Ainsi, en supposant que les forces R et R′ agissent par pulsion, la force R transportera le point A en A′, tandis que R′ transportera le point B en B′; et comme, d'après ce qui précède, ces forces ont la même intensité, les points A et B parcourront des chemins égaux; de sorte que l'effet de ces forces sera de faire prendre à la droite AB, la position A′B′, et par conséquent lui imprimera un mouvementde rotation autour du point O.

On a donné aux équations

$$\Sigma P\cos\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma P\cos\beta = 0,$$

le nom d'*équations d'équilibre de translation*, et à l'équation

$$\Sigma Pp = 0,$$

celui d'*équation d'équilibre de rotation*.

NOTE CINQUIÈME, page 75.

Manière de réduire toutes les forces situées dans le plan des x, y, *à deux résultantes.*

Voici de quelle manière on peut exécuter cette opération. On réduira d'abord, art. 114, toutes les forces situées dans le plan des x, y à deux résultantes MA et NB (fig. 271) égales et dirigées en sens contraire ; on en fera autant à l'égard des forces parallèles à l'axe des z, et il ne s'agira plus que de composer, deux à deux, les quatre résultantes qu'on aura ainsi obtenues. Fig. 271.

Pour cela, soient P et Q les points où les deux résultantes parallèles à l'axe des z rencontrent le plan des x, y; il faudra faire en sorte qu'en changeant les directions de MA et de NB, ces forces passent par les points P et Q. On parviendra à ce but par la construction suivante : Sur le prolongement de PM, on formera le parallélogramme AMDC, et en prenant NE $=$ MD, on formera le second parallélogramme BNEF : alors on pourra substituer au système des forces MA et NB celui des forces MA, NB, MD et NE, parce que ces dernières, directement opposées, se détruisent. Remplaçant ces quatre forces par les diagonales MC et NF, ces diagonales, d'après notre construction, seront égales et dirigées en sens contraires ; et comme alors la direction de MC passera par le point P, on y transportera le point d'application M de cette force. Par le même procédé, on changera la direction de NF, et l'on transportera le point d'application de cette force au point Q. De cette manière, le système des forces situées dans le plan des x, y, se réduira à deux forces égales dirigées en sens contraires, qui rencontreront aux points P et Q les forces de même genre PZ′ et QZ″, parallèles à l'axe des z; par conséquent la résultante des deux forces situées au point P, sera égale à la résultante des forces situées en Q, et agira en sens contraire

NOTE SIXIÈME, page 75.

Démonstration qui tend à prouver que la projection d'une aire sur un plan est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'inclinaison.

On pourrait démontrer cette proposition par la simple considération des triangles rectangles, en prouvant que toute ordonnée qui, dans la projection, serait perpendiculaire à la commune section du plan de projection et de la surface plane projetée est égale à l'ordonnée correspondante de cette surface, multipliée par le cosinus de l'inclinaison, mais nous ne nous y arrêterons pas : nous préférons démontrer ce théorème en faisant voir que si l'on décompose la surface projetée en triangles, chaque triangle, multiplié par le cosinus de l'inclinaison des plans, sera
Fig. 272. égal au triangle de projection. Pour le prouver, soit ABC (fig. 272) l'un de ces triangles ; sa projection DEF est déterminée par les pieds des perpendiculaires AD, BE, CF qui sont abaissées dessus.

Cette projection DEF peut être regardée comme la base d'un prisme triangulaire tronqué, dont AD, BE et CF seraient les trois arêtes. Or on sait, par la Géométrie, que le volume de ce prisme est égal au produit de l'aire de la base par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées des sommets A, B et C sur cette base ; ces perpendiculaires n'étant autre chose que les trois arêtes AD, BE et CF, le volume de notre prisme aura pour expression

$$\textit{aire}\ \mathrm{DEF} \times \tfrac{1}{3}(\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF}) \ldots \quad (475).$$

Mais en posant le prisme sur le triangle ABC, ce triangle en deviendra la nouvelle base, et le prisme aura pour mesure le produit de ABC par le tiers de la somme des trois perpendiculaires Dd, Ee, Ff menées des extrémités D, E, F sur le plan ABC ; de

sorte que la solidité de notre prisme tronqué aura encore pour expression

$$aire\ \mathrm{ABC} \times \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{D}d + \mathrm{E}e + \mathrm{F}f) \ldots \quad (476).$$

Cela posé, les droites Dd, Ee, Ff étant perpendiculaires au plan ACB, sont parallèles, et font les mêmes angles avec les anciennes arètes. Or, AD et Dd étant deux droites perpendiculaires aux plans DEF et ABC, mesurent l'angle d'inclinaison de ces plans ; nommons φ cet angle d'inclinaison, nous aurons donc

$$angle\ \mathrm{AD}d = \varphi\,;$$

par conséquent le triangle ADd rectangle en d, nous donnera

$$\mathrm{D}d = \mathrm{AD}\cos\varphi.$$

On prouverait de même qu'on a

$$\mathrm{E}e = \mathrm{BE}\cos\varphi, \quad \mathrm{F}f = \mathrm{CF}\cos\varphi\,;$$

substituant ces valeurs dans l'expression (476), on obtiendra

$$aire\ \mathrm{ABC} \times \tfrac{1}{3}\,(\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF})\cos\varphi\,;$$

et comme cette expression du volume du prisme est égale à celle qui est désignée par (475), nous trouverons enfin, en les égalant et en supprimant le facteur commun,

$$aire\ \mathrm{DEF} = aire\ \mathrm{ABC}\cos\varphi,$$

cequi démontre notre proposition.

NOTE SEPTIÈME, page 76.

Sur la mesure de l'angle formé par deux plans.

Voici de quelle manière on pourrait démontrer que l'angle formé par deux plans se mesure par l'angle compris entre deux perpendiculaires menées d'un même point C (fig. 72) à chacun Fig. 72.

de ces plans : Ayant mené d'un même point C les deux perpendiculaires CK et CH aux plans MF et EN, nous pourrons, d'après les principes de la Géométrie, faire passer un plan KCH par ces deux droites. Ce plan, à cause des perpendiculaires qu'il renferme, sera perpendiculaire à chacun des plans MF, EN; il le sera donc à leur commune section EF. Réciproquement, EF doit être perpendiculaire aux intersections KD, DH, formées par le plan KCH ; donc l'angle KDH mesure l'inclinaison des plans MF et EN. Cela posé, la somme des angles du quadrilatère CKDH valant quatre angles droits, si l'on en retranche les angles K et H qui sont droits par hypothèse, il restera

$$KDH + KCH = \textit{deux angles droits};$$

mais ACK + KCH équivaut aussi à deux angles droits. Retranchant la partie commune KCH, il reste

$$ACK = KDH;$$

et comme KDH mesure l'angle des deux plans, il en doit être de même de l'angle ACK formé par les deux perpendiculaires.

NOTE HUITIÈME, page 121.

Observations sur le levier.

Fig. 115. Nous avons dit, art. 225, que si la puissance P (fig. 115) était dirigée en sens contraire de la résultante, la charge du point d'appui serait P+S — P'. Si l'on en avait quelque doute, soit R la résultante de P +S ; le système des forces sera remplacé par celui de la figure 273. Le point d'appui étant pressé
Fig. 273. par CB, fait résistance à ce levier; par conséquent C a l'effet d'une force qui agirait suivant CL. Soit L cette force, nous aurons

$$L + P' = R;$$

donc

$$L = R - P':$$

mettant pour R sa valeur $P+S$, il viendra

$$L=P+S-P'.$$

Or il est évident que la force L, qui tend à entraîner le point C, a la même intensité que la force qui pousse le levier contre le point d'appui : par conséquent l'intensité de L mesure la pression que supporte le point d'appui.

NOTE NEUVIÈME, page 191.

Sur les composantes de la vitesse.

La vitesse étant représentée par la droite mm' (fig. 274, si l'on abaisse des extrémités m et m' les perpendiculaires mn et $m'n'$ sur l'axe des x, il est possible que ces perpendiculaires ne soient plus parallèles ; mais cette circonstance n'empêche pas que l'on n'ait encore Fig. 274.

$$nn'' = mm' \cos \alpha.$$

Voici de quelle manière je le démontre : Je fais passer par les points n et n' les plans KL et K'L', perpendiculaires à nn' : alors toutes les perpendiculaires menées aux points n et n' de l'axe des x, doivent se trouver dans ces plans ; donc les perpendiculaires mn et $m'n'$ y seront renfermées. Cela posé, si par le point m nous menons jusqu'à la rencontre du plan K'L', une parallèle mo à l'axe des x, les droites mo et nn' seront égales comme parallèles interceptées par des plans parallèles, et le triangle $m'mo$ sera rectangle en o, parce que mo étant perpendiculaire au plan K'L', devra l'être à toute droite tracée dans ce plan par le point o. Il suit de là qu'on a

$$mo = mm' \cos m'mo;$$

or l'angle $m'mo$ étant égal à α, cette équation devient

$$mo = mm' \cos \alpha \,;$$

et comme nous avons vu que mo était égal à nn', nous avons donc aussi

$$nn' = mm' \cos \alpha .$$

NOTE DIXIÈME, page 275.

Sur l'intégration d'une fonction radicale et exponentielle.

Pour obtenir l'intégrale du premier membre de l'équation (309), j'intègre par parties, ce qui me donne

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = p\sqrt{1+p^2} - \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} \ldots \quad (477).$$

D'une autre part, je multiplie et divise $dp\sqrt{1+p^2}$ par $\sqrt{1+p^2}$, et j'obtiens l'équation identique

$$dp\sqrt{1+p^2} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

et en intégrant, je trouve

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} \ldots \quad (478).$$

Ajoutant cette équation à l'équation (477), et divisant par 2, j'ai ce résultat

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} \ldots \quad (479)$$

Pour intégrer $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$, je fais

$$\sqrt{1+p^2}=p+z;$$

d'où je déduis

$$\sqrt{1+p^2}-p=z;$$

différentiant et réduisant au même dénominateur, je trouve

$$\left(\frac{p-\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp=dz;$$

par conséquent

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{dz}{z};$$

intégrant, j'ai

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=-\log z=-\log(\sqrt{1+p^2}-p).$$

Cette intégrale peut se mettre sous une autre forme; car l'équation identique $1+p^2-p^2=1$, décomposée en facteurs, nous donne

$$(\sqrt{1+p^2}-p)(\sqrt{1+p^2}+p)=1:$$

on tire de cette équation,

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p}.$$

Au moyen de cette valeur, l'intégrale que nous venons d'obtenir devient

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=-\log\frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p}=\log(\sqrt{1+p^2}+p).$$

et l'équation (479) peut être changée en

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2} \log(\sqrt{1+p^2} + p).$$

A l'égard de l'intégrale du second membre de l'équation (309), j'observe que puisqu'on a en général

$$de^{ax} = e^{ax}\, adx,$$

on trouve

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}:$$

comparant $e^{2ms}\, ds$ à cette formule, on obtient

$$\int e^{2ms}\, ds = \frac{e^{2ms}}{2m}.$$

On parviendrait encore plus promptement à trouver l'intégrale qui entre dans le second membre de l'équation (479), en opérant de la manière suivante : on multiplierait $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$ par $p + \sqrt{1+p^2}$, ce qui donnerait, en réduisant,

$$\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}} + dp.$$

Mais pour détruire l'effet de cette multiplication, on diviserait ce résultat par $p + \sqrt{1+p^2}$, et l'on obtiendrait une fraction dans laquelle le numérateur serait la différentielle du dénominateur $p + \sqrt{1+p^2}$; par conséquent on verrait que l'expression $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$ a pour intégrale $\log(p + \sqrt{1+p^2})$, valeur qu'on substituerait dans l'équation (274).

NOTE ONZIÈME, page 282.

Démonstration pour prouver que les masses sont en raison inverse des vitesses.

En général, supposons que l'on ait

$$M : M' :: p : q ;$$

on représentera par m l'unité de masse, et par V, V′ et v les vitesses respectives qui animent les masses M, M′ et m, et l'on aura

$$M : m :: v : V, \quad M' : m :: v : V' ;$$

d'où l'on tirera

$$M : M' :: V' : V.$$

Mais si les masses M et M′ sont incommensurables, représentons par m une masse très petite qui ne soit pas contenue un nombre juste de fois dans les masses M et M′, et appelons p et q les quotiens de M et de M′ par m, et δ, δ' les restes, nous trouverons

$$M = pm + \delta,$$

et

$$M' = qm + \delta'.$$

Nommons V et V′ les vitesses qui animent les masses pm et qm, on aura, dans le cas où elles se font équilibre,

$$V : V' :: qm : pm.$$

Or, plus m sera petit, plus δ et δ' le seront ; de sorte qu'en regardant δ et δ' comme au-dessous de toute quantité donnée, on pourra mettre M et M′ à la place de pm et de qm ; ce qui donnera

$$V : V' :: M' : M.$$

NOTE DOUZIÈME, page 310.

Détermination des momens d'inertie des surfaces et des volumes.

La détermination des momens d'inertie devant s'appliquer à des corps plutôt qu'à des lignes et à des surfaces, qui ne sont que des abstractions, proposons-nous de trouver le moment d'inertie d'un corps terminé par une surface dont l'équation serait donnée. Mais avant de résoudre ce problème, nous allons nous occuper du suivant, qui servira à en faciliter la solution.

Fig. 275. *Trouver le moment d'inertie d'une surface plane* BAC (fig. 275) *comprise entre les axes rectangulaires* Ax *et* Ay, *dont le plan serait perpendiculaire à l'axe fixe* Az *mené par l'origine.*

Pour cet effet, soit Mp une tranche élémentaire parallèle à l'axe des y; nous pourrons regarder cette tranche comme un assemblage de petits élémens rectangulaires posés les uns sur les autres. Représentons par dm l'un de ces élémens, et par mA sa distance à l'axe fixe; le moment d'inertie de dm sera évidemment

$$\overline{\mathrm{A}m}^2 \times dm,$$

et en remplaçant dm par $dxdy$, et $\overline{\mathrm{A}m}^2$ par $x^2 + y^2$, nous aurons pour le moment d'inertie de dm,

$$(x^2 + y^2)\, dxdy \ldots \quad (480).$$

Soit dm' un second élément qui reposerait sur dm, et qui correspondant à la même abscisse, aurait y' pour ordonnée; le moment d'inertie de dm' serait

$$(x^2 + y'^2)\, dxdy'.$$

En général, soient y, y', y'', y''', etc., les ordonnées successives

d'une suite d'élémens qui reposeraient les uns sur les autres, et qui correspondraient à la même abscisse ; la somme des momens d'inertie de ces élémens sera exprimée par

$$(x^2+y^2)\,dxdy+(x^2+y'^2)\,dxdy'+(x^2+y''^2)\,dxdy'' \\ +(x^2+y'''^2)\,dxdy'''+\text{etc.};$$

x et dx étant les mêmes dans cette suite de termes, on peut l'écrire de cette manière,

$$x^2dx\,(dy+dy'+dy''+dy'''+\text{etc.}) \\ +dx\,(y^2dy+y'^2dy'+y''^2dy''+y'''^2\,dy'''+\text{etc.}).$$

Ces expressions reviennent évidemment à

$$x^2\,dx\int dy+dx\int y^2dy\ldots\ (481),$$

et n'expriment autre chose que l'expression (480), qu'on intégrerait en y regardant x et dx comme des constantes.

En effectuant les intégrations indiquées, on trouve

$$x^2dx.y+dx.\frac{y^3}{3}.$$

Cette expression, prise entre les limites $y=0$ et $y=\text{PM}$, donnera pour le moment d'inertie de la tranche élémentaire Mp,

$$x^2dx\times\text{PM}+dx\times\frac{\text{PM}^3}{3}\ldots\ (482).$$

Considérant maintenant la surface ABC comme composée de tranches élémentaires parallèles à l'ordonnée PM ; lorsqu'on passera de l'une de ces tranches à l'autre, l'ordonnée PM qui entre dans l'expression (482), variera en raison de la valeur qu'on donnera à x ; par conséquent on devra regarder PM comme une fonction de x : cette fonction sera donnée par l'équation de la courbe. Ainsi, en supposant que cette équation soit représentée par

$$y=fx,$$

il faudra, dans l'expression (482), changer PM en fx, et nous aurons pour le moment d'inertie de l'élément de la surface plane ABC,

$$x^2dx.fx + \frac{dx(fx)^3}{3}.$$

Cette expression étant intégrée entre les limites $x = o$ et $x = AB$, nous donnera le moment d'inertie de la surface plane ABC.

Si la courbe, au lieu d'être renfermée dans l'angle yAx, s'étendait dans les autres angles formés par le prolongement des axes coordonnés, le moment d'inertie de l'aire de cette courbe se déterminerait de la même manière, moyennant que les intégrales fussent prises entre les limites convenables.

La même marche que nous avons employée pour déterminer le moment d'inertie d'une surface courbe donnée par une équation, peut être suivie lorsqu'on veut obtenir le moment d'inertie d'un volume terminé par une surface courbe dont l'équation serait donnée.

Fig. 276. En effet, soit ABCD (fig. 276) un solide compris entre trois plans rectangulaires coordonnés et une surface courbe. Représentons l'équation de cette surface par

$$f(x, y, z) = o \ldots (483);$$

on regardera le solide comme composé de parallélépipèdes élémentaires posés les uns sur les autres; le moment d'inertie de l'un de ces parallélépipèdes par rapport à l'axe AB, sera

$$(x^2 + y^2)\,dxdydz;$$

intégrant en ne faisant varier que z, on trouvera

$$(x^2 + y^2)\,zdxdy,$$

et en prenant l'intégrale entre les limites $z = o$ et $z = PM$, on obtiendra pour l'expression du moment d'inertie du parallélé-

pipède élémentaire dont PM sera la hauteur,

$$(x^2+y^2)\,dxdy \times \text{PM}.$$

Si l'on suppose que l'équation (483) de la courbe étant résolue par rapport à z, donne

$$z = \varphi\,(x, y),$$

on remplacera PM par cette valeur de z, et l'on aura

$$(x^2+y^2)\,dxdy \times \varphi\,(x, y):$$

alors, en regardant x et dx comme constans, l'intégrale de cette expression représentera le moment d'inertie d'une portion de tranche élémentaire, disposée parallèlement au plan des zy; l'intégrale obtenue dans cette hypothèse ne pourra être qu'une fonction de la variable y et des constantes x et dx, dont la dernière n'entrera dans la fonction que comme facteur commun; par conséquent cette fonction aura évidemment la forme

$$\text{F}\,(x, y) \times dx \ldots \quad (484),$$

et pour qu'elle représente toute la tranche élémentaire abc, il faudra prendre cette intégrale depuis le point a ou $y = 0$, jusqu'au point c ou $y = ac$. Or, ac n'est autre chose que l'ordonnée y de la courbe CcD, dont A$a = x$ serait l'abscisse; l'équation de la courbe CcD s'obtient en faisant $z = 0$ dans l'équation (483) de la surface courbe, qui donne alors

$$y = fx;$$

mettant cette valeur à la place de y dans l'expression (281), on obtient, pour le moment d'inertie de la tranche élémentaire bac,

$$\text{F}\,(x, fx) \times dx,$$

ou plus simplement dxFx. Regardant maintenant x comme variable, et intégrant entre les limites $x = 0$ et $x = $ AD, on aura enfin le moment d'inertie du volume proposé.

NOTE TREIZIÈME, page 365.

Nouvelle démonstration qui tend à prouver que les forces horizontales des fluides se détruisent.

Voici, je crois, de quelle manière on pourrait démontrer que les forces horizontales se détruisent. Imaginons que le corps qui est plongé dans un fluide, soit partagé en tranches très minces par les plans parallèles horizontaux coupés par des plans parallèles verticaux ; la partie du corps comprise entre quatre de ces plans, c'est-à-dire entre les deux plans parallèles horizontaux
Fig. 277. AB′ et DC′ (fig. 277), et les deux plans parallèles verticaux AD′ et BC′, sera déterminée par les surfaces ABCD et A′B′C′D′; ces surfaces ont en général des inclinaisons différentes, puisque le corps est quelconque, et peuvent être considérées comme planes, parce que les plans étant très rapprochés, elles sont infiniment petites. Cela posé, la pression qu'exerce le fluide étant la même sur tous les points du corps, les pressions P et P′ que supportent les surfaces ABCD, A′B′C′D′, auront pour expressions

$$P = p \times ABCD, \quad P' = p \times A'B'C'D'.$$

Remplaçant les parallélogrammes ABCD, A′B′C′D′, par les produits $AB \times mn$ et $A'B' \times m'n'$ des bases par les hauteurs, nous aurons

$$P = p \times AB \times mn, \quad P' = p \times A'B' \times m'n';$$

et comme les largeurs AB et A′B′ sont les mêmes, il y aura égalité entre les produits $p \times AB$ et $p \times A'B'$; nommons Q l'un de ces produits, les équations précédentes deviendront

$$P = Qmn, \quad P' = Qm'n' \ldots \text{(484)}.$$

Or, les pressions P et P′ étant perpendiculaires à leurs surfa-

ces respectives, et par conséquent aux droites mn et $m'n'$, nous pouvons représenter ces pressions par les droites IH et I'H' (fig. 278); décomposons chacune de ces forces en deux autres IK et IL, I'K' et I'L', l'une horizontale et l'autre verticale, et menons les perpendiculaires mr et $m'r'$ entre les plans horizontaux, nous formerons des triangles semblables mnr, $mn'r'$ aux triangles IKH et I'K'H', comme ayant des côtés perpendiculaires. On en déduira donc les proportions suivantes : Fig. 278.

$$\text{IH ou P : IK : IL} :: mn : mr : nr,$$
$$\text{I'H' ou P' : I'K' : I'L'} :: m'n' : m'r' : n'r';$$

d'où l'on tirera

$$\text{IK} = \text{P} \times \frac{mr}{mn}, \qquad \text{IL} = \text{P} \times \frac{nr}{mn},$$
$$\text{I'K'} = \text{P'} \times \frac{m'r'}{m'n'}, \qquad \text{I'L'} = \text{P'} \times \frac{m'r'}{m'n'}.$$

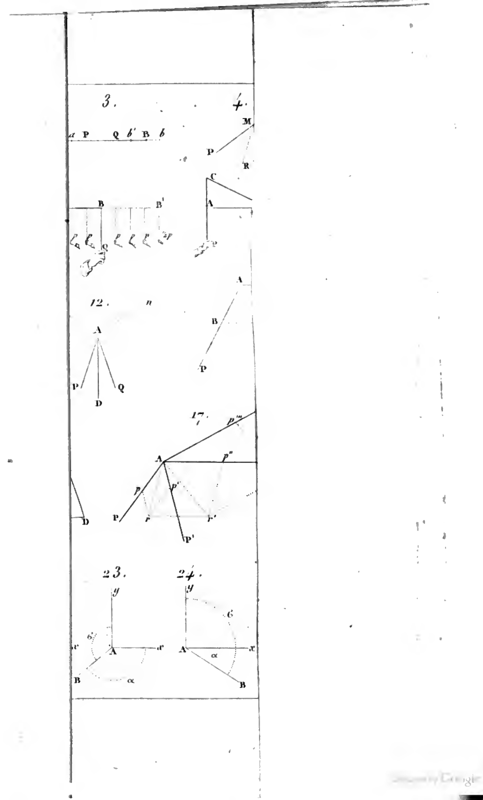
Mettant les valeurs de P et de P', données par les équations (484), on obtiendra

$$\text{IK} = \text{Q} \times mr, \qquad \text{IL} = \text{Q} \times nr,$$
$$\text{I'K'} = \text{Q} \times m'r', \qquad \text{I'L'} = \text{Q} \times n'r'.$$

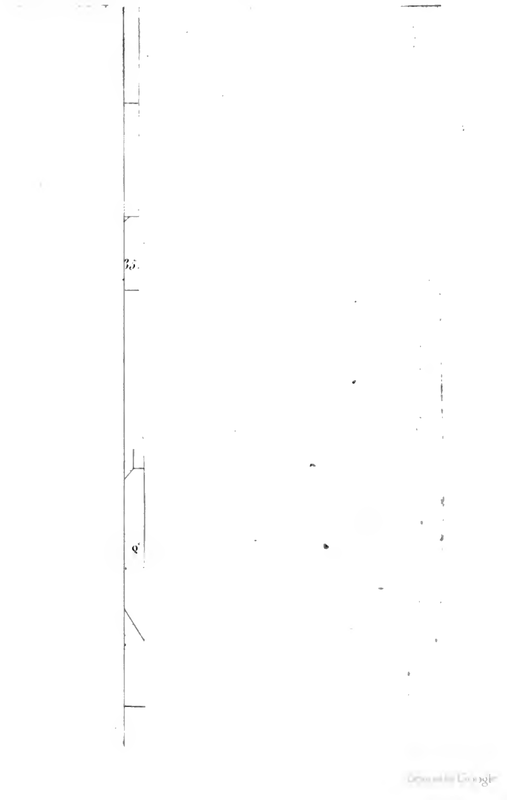
Or les droites mr et $m'r'$ étant égales comme parallèles comprises entre parallèles, on voit que les pressions horizontales IK et I'K' sont égales et se détruisent, puisqu'elles agissent en sens opposés. Il n'en est pas de même des pressions verticales IL et I'L' qui, à cause du facteur commun Q, sont entre elles dans le rapport des projections nr et $n'r'$ des longueurs nm et $r'm'$.

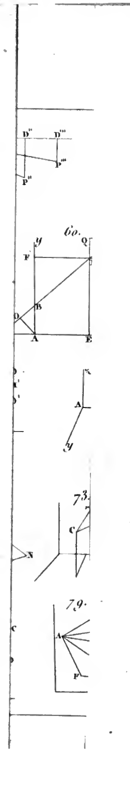
FIN DES NOTES.

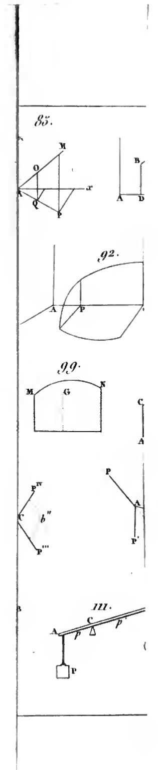




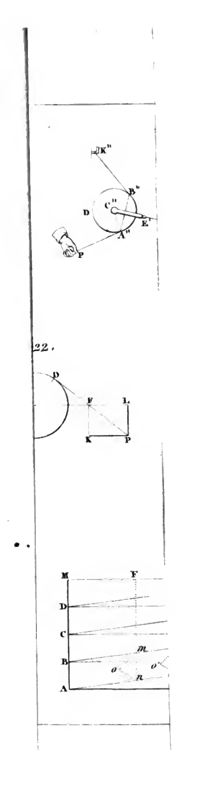
3.
4.
12.
17.
23.
24.

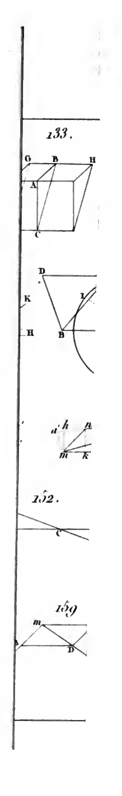

35.
Q

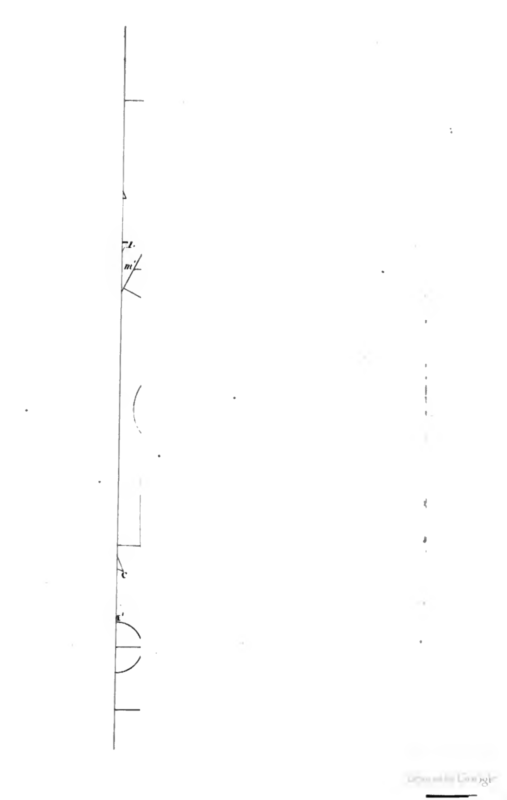

D''
D'''
P'''
P''
60.
y
Q
F
B
O
A
E
A
y
73.
C
N
C
79.
A
F

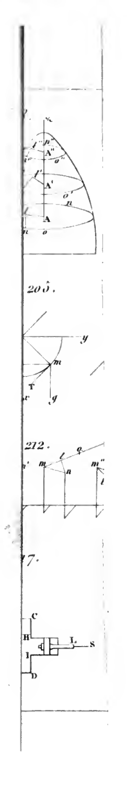


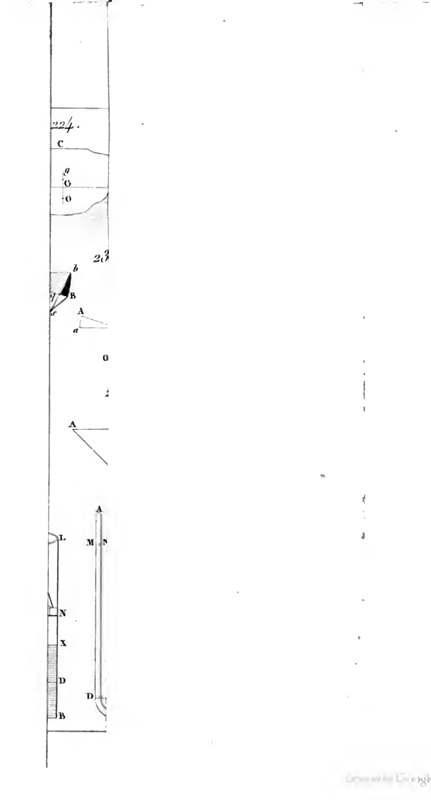
85.
M
O
x
Q
P
B
A
D
92.
A
P
99.
M
G
K
C
A
P
A
P'
C
b''
111.
A
C
p
p'
P


K"
B"
C"
D
E'
A"
P
22.
D
F
L
K
P
M
F
D
C
B
m
o
o'
n
A

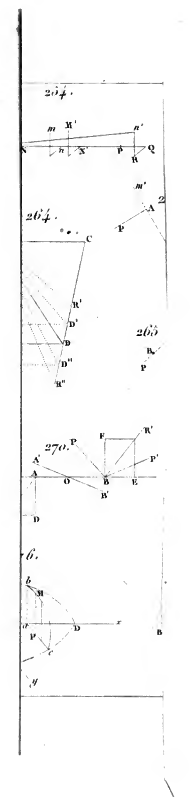

133.
G
B
H
A
C
D
K
I
H
B
d
h
n
m
k
152.
C
159
m
B
D


m'
C


205.
212.
7.
y
m
T
g
A
A'
A"
C
H
I
D
L
S



224.
C
g
G
O
23
b
B
s
A
a
O
A
A
L
M
N
N
X
D
B
D



264.
m
M'
n'
N
n
N'
P
Q
R
m'
A
P
2
264.
C
R'
D'
D
D''
R''
265
B
P
270.
P
F
R'
A'
P'
A
O
B
E
B'
D
6.
b
M
d
D
x
P
c
y
B

